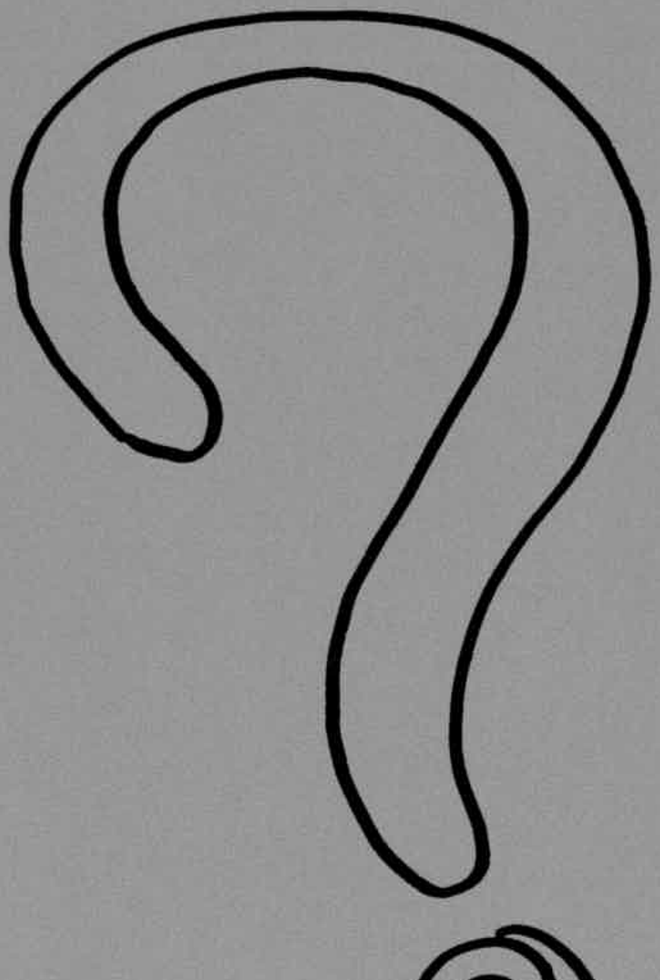
SOCIETE NEUCHATELOISE DES MAITRES DE MATHEMATIQUE, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE



BULLETIN no 0, JANVIER 1988

A l'occasion de la parution de ce bulletin, une pensée toute particulière va à la mémoire de notre ami Marcel Arnoux qui participait aux séances du Groupe de réflexion.

Rédaction: Comité de la Société neuchâteloise des maîtres de mathématique, de physique et de chimie.

Contact: Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts-Geneveys

Délai pour transmettre vos contributions au prochain numéro: 15 avril 1988

EDITORIAL

UN BULLETIN DE LA SNMMPC ... ENCORE UN TRUC ?

... Peut-être, mais pas comme les autres. Jugez-en plutôt :

... Il reflètera ce que vous vivez avec vos élèves du secondaire ou étudiants.

... Il vous offrira un champ de réflexion axé sur la didactique.

... Il vous ouvrira aux nouvelles situations et réflexions du jour.

... Il vous permettra de savoir tout ce que vous avez voulu savoir à propos du terrain d'application de votre enseignement sans jamais oser le demander (gloires et déboires des enseignants).

... Il sera sans prétention... mais sa qualité dépendra des contributions de chacun, dans un esprit d'échange et de formation continue.

Alors ... USEZ, CRITIQUEZ, AMELIOREZ, bref, PARTICIPEZ A LA VIE
DE CE NOUVEAU CANARD
AVEC VOUS IL SE REMPLUMERA...
(SANS VOUS, IL .... vous avez deviné ...)

Pour en savoir plus

... C'est dans sa séance du 17 novembre 87 que le comité de la SNMMPC a proposé à l'assemblée d'appuyer la création d'un bulletin/journal, se fondant sur les idées émises par un groupe de réflexion en didactique de la mathématique. Une année d'essai avec 3 numéros ... dont le numéro zéro qui est entre vos mains.

... Si ce numéro zéro contient des sujets essentiellement axés sur les mathématiques, nous adressons un appel aussi à ceux qui enseignent physique, chimie et d'autres branches.

... Je remercie toutes les personnes qui ont collaboré à l'élaboration de ce journal en nous fournissant des articles pour ce numéro et pour les prochains. Sachez qu'il nous faut encore remplir quelques pages.

En espérant recevoir vos articles futurs, longue vie à notre journal.

LE BULLETIN CHERCHE UNE COUVERTURE ... UN CONCOURS EST OUVERT A TOUS

ENVOYEZ VOS PROPOSITIONS AU COMITE

MATHEMATIQUE

QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES ?

Alain ROBERT

Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
CH-2000 Neuchatel

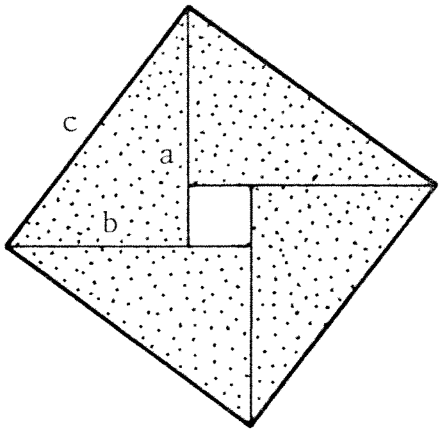
Les triangles rectangles ont été étudiés depuis la plus haute antiquité et le théorème de Pythagore était connu des Chinois au deuxième millénaire avant Jésus-Christ. Par contre, le problème des nombres congruents, liés aux triangles rectangles rationnels ayant une aire entière, n'est étudié que depuis le XIIème Siècle de notre ère. Ce n'est que tout récemment (1983) que Tunnel a pu donner une condition nécessaire pour qu'un entier soit congruent. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer permettrait de démontrer que la condition donnée par Tunnel est suffisante. Ainsi, l'histoire n'est encore pas terminée...

1.- LE THEOREME DE PYTHAGORE

Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit a et b sont reliés à l'hypothénuse c par la relation:

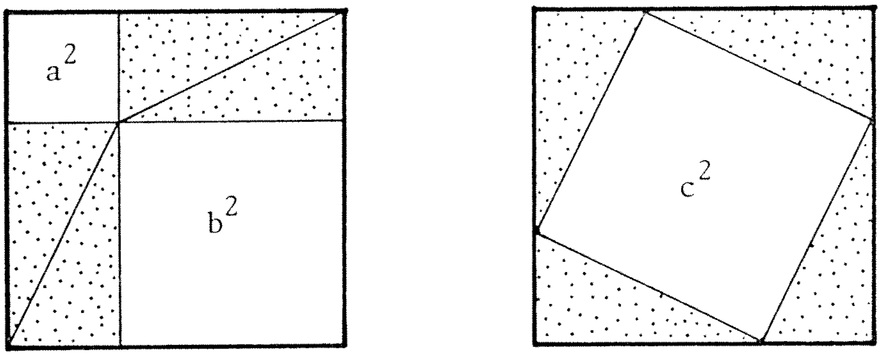
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Inversement, cette relation caractérise les triangles rectangles. Ce fait semble déjà avoir été connu des Chinois au deuxième millénaire avant Jésus-Christ puisqu'on trouve une "démonstration" de cette relation dans le plus ancien manuscrit chinois mathématique connu, le Chon-pei. Du moins, on y trouve une preuve visuelle que le triangle rectangle de côtés 3 et 4 a une hypothénuse de 5 ... L'argument visuel a été repris dans le fameux Lilavati écrit par le mathématicien indien Bhaskara (1114-1158).



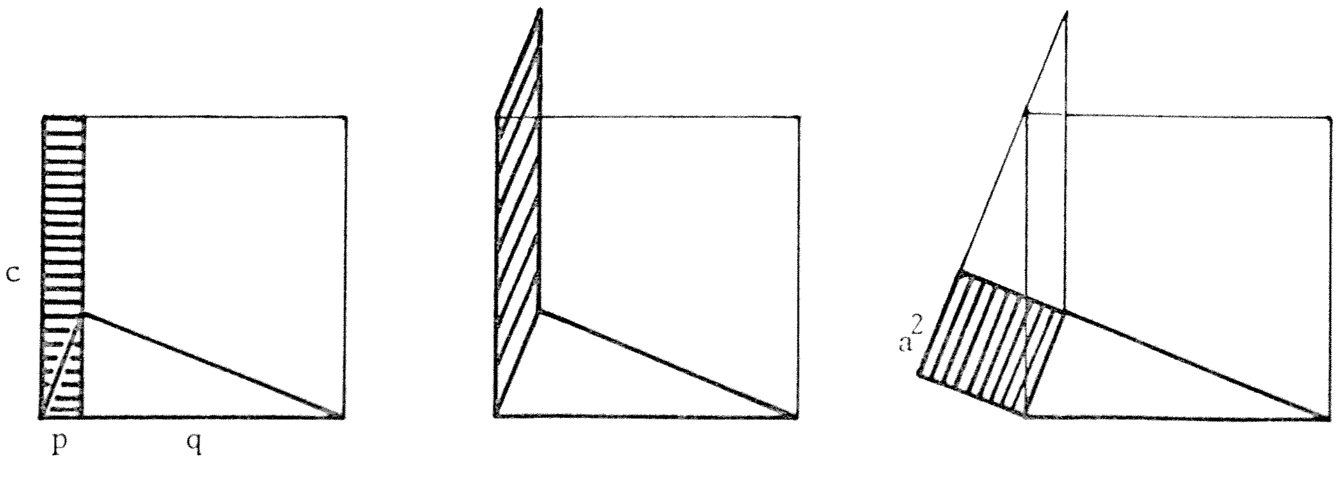
$$4(\tfrac{1}{2}ab) + (a - b)^2 = c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2$$

Voici un argument visuel probablement encore plus simple!



Contemplez !

Celui d'Euclide est légèrement plus complexe, mais aussi plus précis.



$$a^2 = pc \quad \text{et} \quad b^2 = qc \implies a^2 + b^2 = (p + q)\,c = c^2$$

Pour construire des triangles rectangles à côtés entiers, Pythagore avait déjà découvert une méthode: partons d'un nombre impair a, de sorte que $a^2 = 2n + 1$ est aussi impair et $b = n$ conduit au triangle rectangle

$$a^2 + b^2 = (2n + 1) + n^2 = (n + 1)^2 \quad .$$

On trouve ainsi les triangles rectangles:

3 , 4 , 5
5 , 12 , 13
7 , 24 , 25
9 , 40 , 41
etc.

Cette méthode ne fournit que des triangles rectangles ayant un côté de l'angle droit d'une unité inférieure à l'hypothénuse. Il y en a d'autres, par exemple le triangle de côtés 20, 21 et 29 est rectangle et ne s'obtient pas par la méthode de Pythagore.

Voici quelques résultats généraux concernant les triangles rectangles à côtés entiers.

<u>Observation 1.</u>
Dans un triangle rectangle à côtés entiers, un côté de l'angle droit au moins est pair.

<u>Preuve.</u> Une simple considération de parité ne suffit pas puisque dans la relation $a^2 + b^2 = c^2$, on pourrait imaginer a priori que a et b sont impairs, avec c pair. Il faut effectuer un calcul modulo 4 pour s'apercevoir de l'impossibilité de cette situation.

Si $x \equiv 0 , 1 , 2 , 3 \mod 4$, on a resp.

$x^2 \equiv 0 , 1 , 0 , 1 \mod 4$

et par conséquent, si x et y sont impairs, on a

$$x^2 \equiv 1 \equiv y^2 \mod 4 \quad \text{d'où} \quad x^2 + y^2 \equiv 2 \mod 4$$

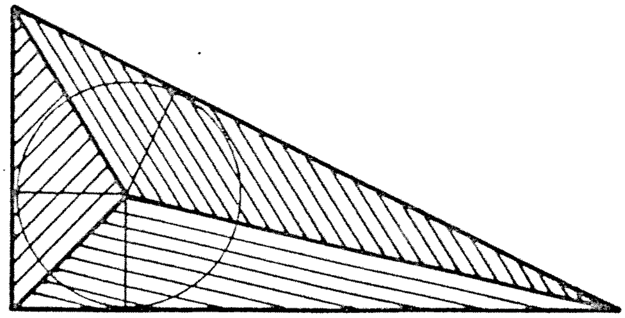
prouvant que $x^2 + y^2$ n'est pas un carré parfait !

<u>Observation 2.</u>
L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est entière.

<u>Preuve.</u> En effet, l'aire est donnée par $S = \frac{1}{2}\,ab$ et nous venons de montrer que le produit ab est pair.
Nous verrons même dans la section suivante que l'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est <u>paire</u>.

<u>Observation 3.</u>
Dans un triangle rectangle à côtés entiers, le rayon du cercle inscrit est entier.

<u>Preuve.</u> L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de rayon de cercle inscrit r se calcule facilement par décomposition du triangle initial en trois sous-triangles ayant leurs sommets en le centre du cercle inscrit.



$$S = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

On trouve

$$S = \frac{1}{2}r\,(a + b + c) \quad .$$

Pour un triangle rectangle, on a aussi

$$S = \frac{1}{2}ab$$

d'où par comparaison,

$$r\,(a + b + c) = ab \Longrightarrow$$

$$r = \frac{ab}{a + b + c} \quad .$$

Il s'agit donc de montrer que $a + b + c$ divise ab ...

Amplifions la fraction par $a + b - c$. On trouve:

$$r = \frac{ab\,(a + b - c)}{(a + b)^2 - c^2} = \frac{ab\,(a + b - c)}{2ab} = \frac{a + b - c}{2}$$

en vertu de l'égalité de Pythagore $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $a + b - c$ est pair !

Voici une façon élégante de le montrer: pour tout entier x, x et x^2 ont la même parité

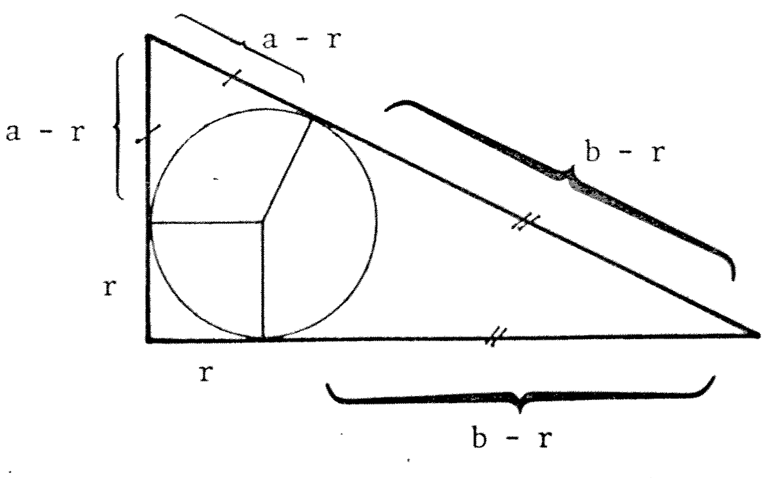
$$x \equiv x^2 \mod 2$$

d'où

$$a + b - c \equiv a^2 + b^2 - c^2 = 0 \mod 2 \quad .$$

Remarque 1. La relation reliant le rayon du cercle inscrit aux côtés d'un triangle rectangle possède aussi une démonstration visuelle

$$c = (a - r) + (b - r) \Longrightarrow 2r = a + b - c \quad .$$



Remarque 2. La construction pythagoricienne partant d'un entier impair a, $b = \frac{1}{2}(a^2 - 1)$ et $c = \frac{1}{2}(a^2 + 1)$ fournit un rayon de cercle inscrit $r = \frac{1}{2}(a - 1)$. Tous les entiers naturels apparaissent donc comme rayons de cercles inscrits à de tels triangles.

Remarque 3. Nous avons utilisé la congruence $n^2 \equiv n \mod 2$.
Elle a été généralisée par Fermat sous la forme suivante:

si p est un nombre premier,
alors $n^p \equiv n \mod p$.

Lorsque n n'est pas divisible par p, on peut écrire cette congruence $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Sous cette forme, elle a été généralisée par Euler.
Dénotant par $\varphi(m)$ le nombre d'entiers relativement premiers à m parmi les représentants 1, 2, ..., m-1 , on a

$$n^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m \quad \text{si n et m sont rel. premiers.}$$

A son tour, cette congruence est un cas particulier du théorème de Lagrange qui affirme que dans un groupe fini, l'ordre d'un élément est un diviseur de l'ordre du groupe:

G groupe fini d'ordre $g > 1$
$\Longrightarrow \quad x^g = 1 \quad \forall x \in G$.

2.- TRIPLES PYTHAGORICIENS

Nous allons déterminer tous les triangles rectangles à côtés entiers. Lorsque a, b et c sont trois entiers strictement positifs satisfaisant $a^2 + b^2 = c^2$, il est possible de les diviser par leur pgcd (plus grand commun diviseur) d et obtenir trois entiers a/d , b/d et c/d relativement premiers encore strictement positifs et dans la même relation

$$(a/d)^2 + (b/d)^2 = (c/d)^2 .$$

Il suffit donc d'étudier les triples d'entiers > 1 relativement premiers avec $a^2 + b^2 = c^2$. Permutant au besoin a et b , on peut supposer b pair.

Définition. *Un triple pythagoricien est un triple* (a, b, c) *formé d'entiers* > 1 , *relativement premiers avec* b *pair et* $a^2 + b^2 = c^2$.

THEOREME. *Les triples pythagoriciens* (a, b, c) *sont tous donnés par les formules (paramétrisation)*

$$a = m^2 - n^2 , \quad b = 2\,mn \qquad c = m^2 + n^2$$

où $m > n > 1$ *sont deux entiers relativement premiers de parité différente.*

De plus, deux couples $(m, n) \neq (m', n')$ *distincts satisfaisant aux conditions conduisent à des triples pythagoriciens différents.*

Corollaire. *L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est un nombre pair.*

(En effet, les côtés d'un triangle rectangle entier sont multiples d'un triple pythagoricien, donc de la forme

$$d\,(m^2 - n^2)\ ,\quad 2\,d\,mn \quad \text{et} \quad d\,(m^2 + n^2)$$

et l'aire de ce triangle rectangle est

$$d^2\,mn\,(m^2 - n^2) \quad \text{paire car} \quad mn \text{ pair.)}$$

Nous allons donner trois démonstrations (ou indications de démonstrations) du théorème.

Démonstration arithmétique

Nous supposons b pair et a, b, c relativement premiers avec $a^2 + b^2 = c^2$. Donc a et c sont impairs, d'où $c + a$ et $c - a$ pairs. Ecrivons alors la relation de base $b^2 = c^2 - a^2$ sous la forme

$$(b/2)^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \qquad \text{(produit d'entiers).}$$

Tout diviseur commun de $\frac{1}{2}(c+a)$ et $\frac{1}{2}(c-a)$ doit diviser la somme c et la différence a de ces deux nombres, donc encore diviser $b^2 = c^2 - a^2$. Un tel diviseur commun ne peut être que 1, prouvant que $\frac{1}{2}(c+a)$ et $\frac{1}{2}(c-a)$ sont relativement premiers. Comme leur produit est un carré, chacun d'eux est un carré, disons

$$\frac{1}{2}(c + a) = m^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(c - a) = n^2 \quad .$$

On en tire bien $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ puis $b = 2\,mn$.

Tout diviseur commun de m et n doit diviser a, b et c : m et n sont donc relativement premiers. Finalement, b étant supposé pair, a est impair

$$m^2 - n^2 \text{ impair} \implies m \text{ et } n \text{ sont de parité différente.}$$

Les formules

$$m = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \qquad \text{et} \qquad n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}$$

montrent que le couple (m, n) est bien déterminé par le triple pythagoricien (a, b, c).

Démonstration algébrique

Au lieu de résoudre $a^2 + b^2 = c^2$ en entiers, résolvons l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en nombres rationnels $(x = a/c\ ,\ y = b/c)$. La paramétrisation du cercle unité par les fonctions trigonométriques

$$x = \cos t \ ,\quad y = \sin t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi[$$

ne conduit pas immédiatement (!) aux solutions rationnelles. Introduisons plutôt le corps de Gauss

$$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[i] = \{x + iy : x \text{ et } y \in \mathbb{Q}\} \quad .$$

La norme d'un tel nombre $z = x + iy$ est définie par

$$N(z) = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{Q} \quad .$$

Nous cherchons donc les solutions de

$$z \in \mathbb{Q}(i) \quad \text{et} \quad N(z) = 1 \quad .$$

On en devine les solutions

$$z = u/\bar{u} \quad \text{où} \quad u \in \mathbb{Q}(i)$$

puisque dans ce cas

$$N(z) = N(u) \;/\; N(\bar{u}) = 1$$

(la norme jouit des propriétés $N(uv) = N(u)\,N(v)$ et $N(\bar{u}) = N(u)$). Nous allons démontrer ci-dessous que ces solutions particulières fournissent <u>toutes</u> les solutions du problème proposé. Supposons acquis ce fait et continuons en écrivant $u = m+in$, $\bar{u} = m-in$ avec m et $n \in \mathbb{Q}$. En amplifiant par un dénominateur commun à m et n (le plus économique possible) on peut supposer que dans la représentation

$$z = \frac{m+in}{m-in} \quad , \text{ m et n sont entiers rel. premiers.}$$

On a donc:

$$x + iy = \frac{(m+in)(m+in)}{m^2 + n^2} = \frac{m^2 - n^2 + 2i\,mn}{m^2 + n^2} \quad .$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad \left(= \frac{a}{c} \right) \quad , \qquad y = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \left(= \frac{b}{c} \right)$$

d'où il est facile de déduire une nouvelle démonstration du théorème. En cours de route, nous avons admis le <u>résultat</u>

$$z \in \mathbb{Q}(i) \ , \ N(z) = 1 \implies \exists\, u \in \mathbb{Q}(i) \ , \ z = u/\bar{u} \quad .$$

Voici comment on vérifie ce résultat. Calculons

$$z(1 + \bar{z}) = z + z\bar{z} = z + N(z) = z + 1 \quad .$$

Ainsi $u = 1 + z$ fera l'affaire : $z = (z+1) \;/\; (1+\bar{z}) = u/\bar{u}$.

Signalons simplement que la méthode algébrique a connu d'importantes généralisations. Par exemple, le résultat démontré à la fin du raisonnement a été généralisé par Lagrange sous la forme suivante:

Lorsque K/k est une extension galoisienne de corps avec groupe de Galois cyclique fini engendé par un automorphisme σ de K

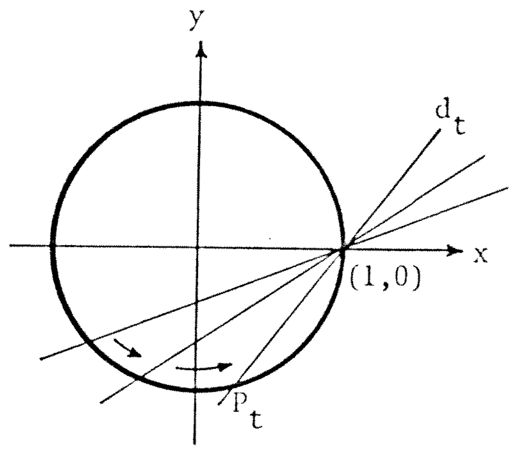
$$z \in K \ , \ N(z) = 1 \implies \exists\, u \in K \ , \ z = u/\sigma(u)$$

(rappelons que la norme dans ce contexte est définie par $N(z) = z\,\sigma(z)\,\sigma^2(z) \ldots$ produit des conjugués de z de sorte que $N(z) \in k$ pour tout $z \in K$; l'expression $1+\overline{z}$ de ci-dessus étant remplacée par une "résolvante" de Lagrange). Ce résultat a encore été généralisé par Hilbert à toutes les extensions galoisiennes finies: son fameux théorème 90 s'écrit aujourd'hui sous forme cohomologique

$$H^1\,(\mathrm{Gal}(K/k),\ K^{\times}) = \{0\}\ .$$

Preuve géométrique

Pour trouver les solutions rationnelles de $x^2+y^2=1$, considérons le faisceau de droites issues du point rationnel $(1,\,0)$.



L'équation de la droite d_t de pente t est $y = t(x-1)$. Cette droite coupe le cercle en un deuxième point P_t dont les coordonnées seront rationnels précisément si la pente t de d_t est rationnelle. Explicitement, les points d'intersection de $y = t(x-1)$ avec le cercle $y^2 = 1-x^2$ conduisent aux valeurs d'abscisses

$$t^2\,(x-1)^2 = 1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

d'où $x = 1$ (abscisse du point $(1,\,0)$ sur d_t) et

$$t^2\,(x-1) = -\,(1+x)\ ,$$

$$x\,(t^2+1) = t^2 - 1\ .$$

Les valeurs rationnelles de t conduisent bien à des coordonnées rationnelles et en posant $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, on retrouve bien

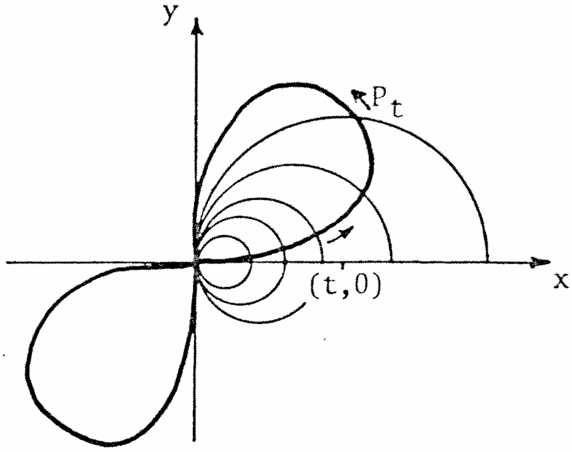
$$|x| = \frac{|m^2-n^2|}{m^2+n^2}\ ,\qquad |y| = \frac{|2mn|}{m^2+n^2}\ .$$

Cette méthode de paramétrisation rationnelle permet de même de trouver les points à coordonnées rationnelles sur l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ ou plus généralement sur toute courbe de "genre 0". Une modification convenable de la méthode permet aussi de trouver les points rationnels sur la lemniscate de Bernoulli d'équation $(x^2+y^2)^2 = 4xy$.

Ici, on choisira des cercles tangents à une branche du point singulier (point double). Chacun de ces cercle recoupe la lemniscate en un point P_t de coordonnées

$$x = \frac{2t}{1+t^4}\ ,\qquad y = \frac{2t^3}{1+t^4}$$

rationnelles pour les valeurs rationnelles de t (le paramètre t est tout simplement le rayon du cercle centré sur l'axe Ox coupant la lemniscate).



A suivre

LE VELO ET LA PHYSIQUE

(Extrait de Walker, J. Le carnaval de la physique. Dunod, Paris, 1980)

2.25

Forme du vélo

Pourquoi les vélos modernes ont-ils cette forme ? Il y eut dans le passé une grande variété de modèles (figure 2.25*a*). Certains, par exemple, avaient des roues de tailles complètement différentes, et certains avaient leurs pédales fixées directement à la roue avant. La bicyclette moderne est elle plus efficace que ses prédécesseurs ?

Pourquoi la fourche de la roue avant est-elle courbée sur les bicyclettes modernes ? Seraient-elles plus ou moins stables avec les fourches ayant les formes représentées sur la figure 2.25*b* ?

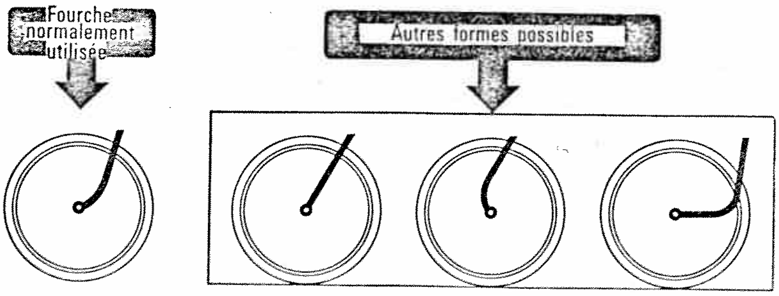


Figure 2.25 b

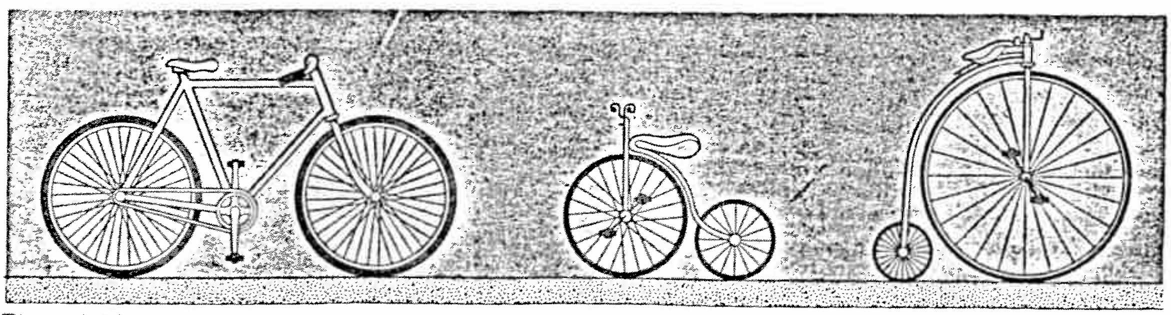


Figure 2.25 a

ALLEZ-Y, METTEZ LA MAIN A LA PATE !

Tel est le mot d'ordre du laboratoire "Les jeunes et les Sciences" du Technorama de la Suisse. Ce laboratoire s'adresse avant tout aux jeunes à partir de treize ans. On y montre la façon avec laquelle l'homme appréhende son environnement, naturel ou technique, comment il assimile les informations reçues et comment il agit.

Le laboratoire est subdivisé en quatre secteurs:

- Secteur bleu, sens et sensations: entendre, voir, sentir, sons, vibrations, image, lumière, couleur.
- Secteur vert, vie et espace vital: cellules, plantes, animaux, homme, eau, sol, lumière, photosynthèse.
- Secteur jaune, pensée et assimilation: géométrie, mathématiques, propriétés de la matière, chimie, électricité, électromagnétisme.
- Secteur rouge, force et mouvement: force, masse, vitesse, accélération, rotations, transmission de force, pression, courant, aérodynamique.

Informations: Les jeunes et les Sciences
Technorama
8404 Winterthur

Gérard Gast
5, rue Emile Argand
2000 Neuchâtel

MATHEMATIQUE

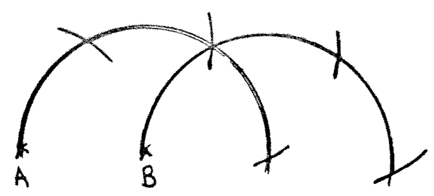
CONSTRUCTIONS DE MASCHERONI OU LA GEOMETRIE DU COMPAS

Françoise Jeandroz

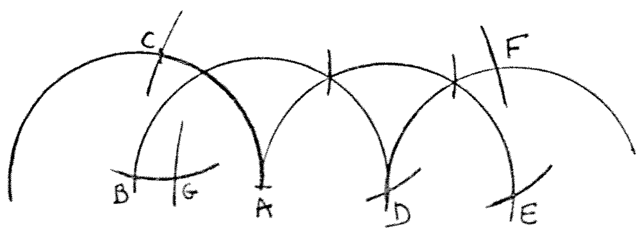
La théorie de Mascheroni (1797) est que toutes les constructions faites à la règle et au compas peuvent être faites uniquement au compas sauf le tracé des droites .
En voici quelques exemples :

Exemple 1:

a) Tripler une distance AB



b) Diviser une distance en n parties égales (ici n=3)



Démarche:

1. Construire BE = 3 BA selon la méthode précédente

2. Cercle de centre B et de rayon BA : (B;BA)

$$(B;BE) \cap (E;BA) = F$$

$$(B;BA) \cap (E;BE) = C$$

$$(C;BC) \cap (E;CF) = G$$

B, G et A sont alignés et BG = 1/3BA

Il suffit de reporter BG selon la möthode précédente.

Démonstration:

1. CF // BE

CGF et EFG sont égaux (tous les côtés égaux)

$\widehat{CFG} = \widehat{EGF} \Longrightarrow$ CF // GE

$\left.\begin{array}{l} CF \,//\, GE \\ CF \,//\, BE \end{array}\right\} \Longrightarrow BE \,//\, GE \Longrightarrow$ B, G et E sont alignés.

2. CBG triangle isocèle

CBE triangle isocèle

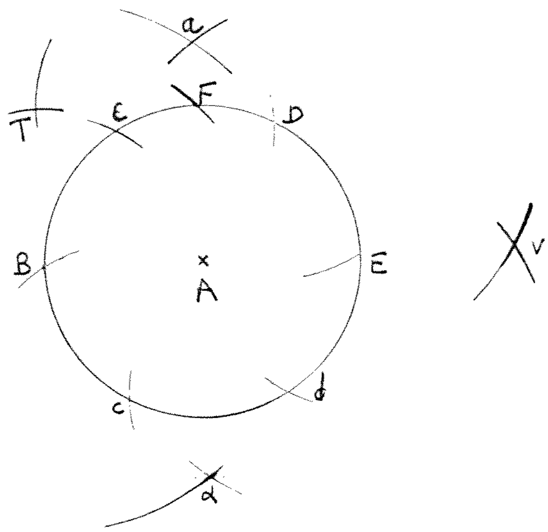
CBG : angle commun $\Longrightarrow$ les triangles sont semblables

$$\frac{BG}{BC} = \frac{BC}{EB} \quad \text{ou} \quad \frac{BG}{BA} = \frac{BA}{EB} = \frac{1}{3}$$

Exemple 2: Racine des nombres entiers

a) Racine des nombres de 1 à 10

Supposons que AB = u



Solution:

(A;AB)

AB = BC = CD = DE = Ed = cB = cd

(B;BD) $\cap$ (E;BD) = $\{a;\alpha\}$

(D;BD) $\cap$ (d;BD) = v

(B;Aa) $\cap$ (A;AB) = F

(B;AB) $\cap$ (F;AB) = T

Remarque ABTF est un carré

Conclusions :

AB = $\sqrt{1}$

Aa = $\sqrt{2}$

BD = $\sqrt{3}$

BE = $\sqrt{4}$

ET = $\sqrt{5}$

aV = $\sqrt{6}$

CV = $\sqrt{7}$

aα = $\sqrt{8}$

BV = $\sqrt{9}$

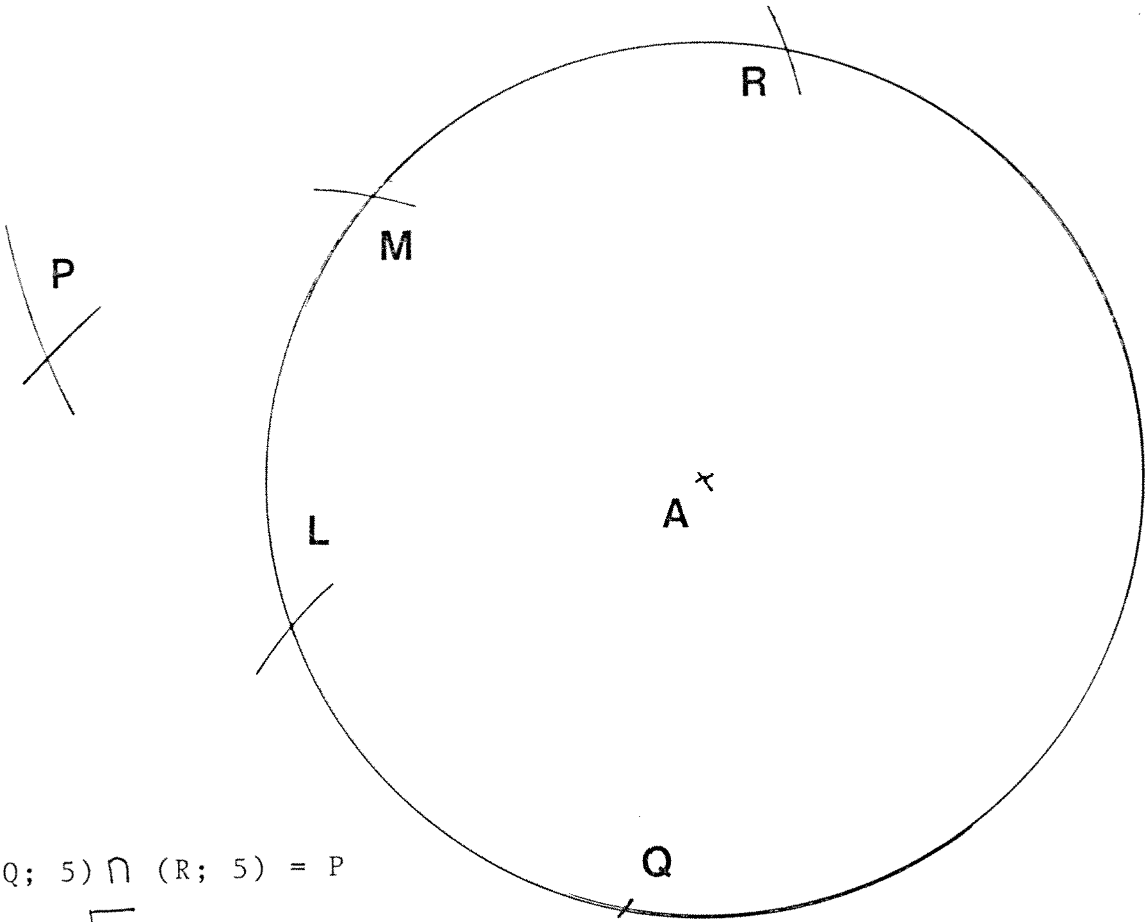
TV = $\sqrt{10}$

b) Racine d'un nombre entier: exemple racine de 17

Solution: prendre le carré parfait juste au-dessus :25

25 -17 = 8

(A; $\sqrt{8}$)



$(Q;\ 5) \cap (R;\ 5) = P$

$AP = \sqrt{17}$

Démonstration:

QAP est rectangle

$AP = \sqrt{QP^2 - AQ^2} = \sqrt{25 - 8} = 17$

Par construction récurrente , on peut trouver la racine carrée de n'importe quel nombre entier.

Dans le prochain numéro nous vous présenterons le problème dit de Napolèon , c'est à dire la recherche du centre d'un cerlce et aussi la duplication (approximative bien entendu) du cube.

A suivre

ATELIER MATH

LA REVUE "J E U X E T S T R A T E G I E":

MIEUX QU'UN "PICSOU" ... UN HEUREUX COMPLEMENT AU COURS "MATH 7, 8, 9 CS"

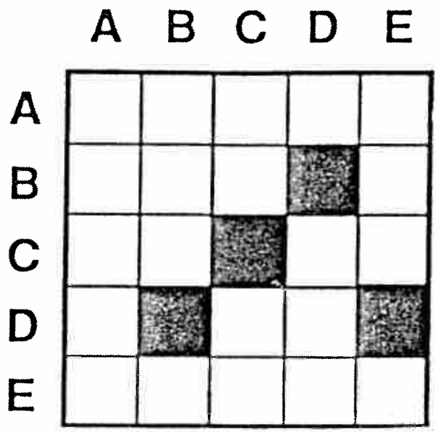
Jacques-André Calame

Dans le cours "math 7 CS", on trouve une activité du thème "Nombres" intitulée "Nombres croisés de taille !". Cela signifie que le calcul mental ou à la main ne suffisent pas forcément et que la calculatrice peut être un outil précieux, en particulier lorsque les définitions, ouvertes, nécessitent plusieurs tests. Alors qu'à la main, il faudrait plusieurs heures pour parvenir à une grille correctement remplie, il n'est pas rare de voir des élèves parvenir au bon résultat en quinze ou ving minutes en utilisant au bon moment la calculatrice.

L'exemple de grille proposé ici est tiré de la revue "Jeux et stratégie". Les nombres croisés constituent certainement une activité motivante et ouverte en mathématique. En 7ème année, c'est assez ardu, en 8ème, c'est le bon moment, en 9ème et plus tard...on s'y accroche encore, cherchant un cheminement élégant ou rapide.

Nous tentons ici de montrer une manière de procéder pour remplir la grille, à titre d'exemple. Le but pour le lecteur sera de découvrir quels objectifs du cours de mathématique sont atteints, ou quels domaines sont touchés lorsqu'on se lance dans une telle activité. Se faisant, le lecteur se demandera aussi à quel moment telle ou telle aptitude est mise en éveil chez l'élève. Il pourra confronter ses conclusions à celles qui sont proposées en fin d'article.

Et maintenant...au travail ! Il s'agit de compléter cette grille:



Horizontalement:
A. Si on ajoute 134 au nombre, le résultat est un cube parfait. B. Une permutation de 595. C. La somme de ses chiffres est 7. - Si on multiplie ce nombre par 14 et qu'au résultat on ajoute 15, on obtient le carré de ce nombre. D. Le produit de ses chiffres est 14. E. Permutation de 55999.

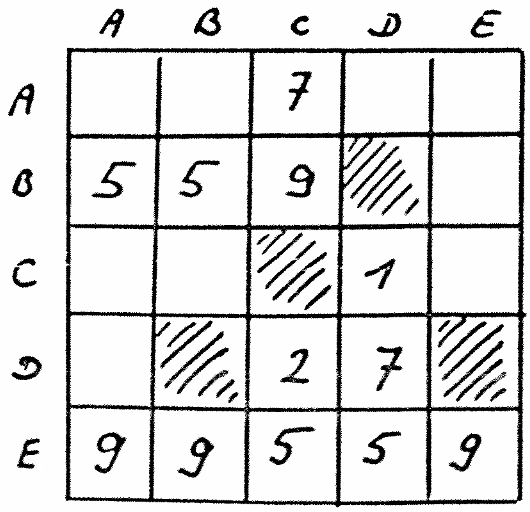
Verticalement:
A. Un carré parfait, le produit de ses chiffres est 3240. B. Il se divise par 127. C. Le produit de ses chiffres est 63. - Carré parfait. D. Un multiple de 5, la somme de ses chiffres est 13, le produit est 35. E. Cube parfait.

1). B horizontal (1) offre 3 solutions: 595. 955 et 559. Or, C vertical (1) est 79 ou 97 puisque le produit de ses chiffres est 63. Donc B horizontal (1) ne peut être que 559 et C vertical (1) est 79.

2) D horizontal mène à 27 ou 72, mais C vertical implique 27 puisque seul 25 est un carré parfait répondant à la condition (pas de carré parfait entre 70 et 79). Donc D horizontal est 27 et C vertical (2) est 25.

3) Poursuivons avec D vertical. Le multiple de 5 se terminera par 5 à cause de E horizontal. Puisque la somme de ses chiffres est 13, ce sera 175, et E horizontal sera 99559.

Notre grille se présente donc ainsi:



4) C'est ici que la calculatrice peut faire son entrée! Par exemple, pour rechercher le C horizontal (2) en tenant compte du E vertical. L'examen de l'identité $n(n-1) + n = n^2$ conduit ainsi rapidement à $15 \cdot 14 + 15 = 225$. Donc C horizontal est 15, le seul cube de trois chiffres se terminant par 5 étant 125 pour E vertical.

5) B vertical vaut 254 puisqu'il est divisible par 127, et par suite C horizontal (1) est 34.

6) Pour A horizontal et A vertical, la calculatrice est aussi utile. Pour A horizontal: $x = n+134$, n étant de la forme ..7.1, on est sûr que le nombre se termine par 5. Sur les 3 candidats possibles de cinq chiffres (15625, 42875 et 91125), seul le deuxième est acceptable puisque, diminué de 134, il présente un 7 comme chiffre des centaines.
Donc A horizontal vaut 42741.

7) Le A vertical est de la forme 453.9. Mais le produit de ses chiffres est 3240. Donc le dernier chiffre est 6 et la grille, maintenant terminée, est la suivante:

	A	B	C	D	E
A	4	2	7	4	1
B	5	5	9		2
C	3	4		1	5
D	6		2	7	
E	9	9	5	5	9

<u>Trois questions après cette activité:</u>

1. Quels champs d'activités ai-je visités ?
2. Ces champs correspondant-ils à certains objectifs du cours de mathématique ?
3. Quelles qualités cette activité présente-t-elle ?

A la première question, j'ai répondu (de manière non exhaustive):

- utilisation de mes souvenirs dans N:
  critères de divisibilité;
  multiples et diviseurs d'un nombre;
  carré parfait;
  équivalences telles que "se divise par 127" équivaut à "multiple de 127";
  permutation;
- utilisation de la calculatrice avec discernement;
- utilisation de la mise en équation;
- utilisation du "si...alors", lié aux croisements.

A la deuxième question, j'ai répondu que **les champs d'activités visités** correspondent à l'état d'esprit de quatre des onze thèmes du cours de mathématique, à savoir: **Nombres - Calculatrice - Calcul littéral - Logique et raisonnement**

A la dernière question, j'ai répondu après avoir vu plusieurs fois des élèves à l'oeuvre et après m'être entretenu avec eux. Je noterai au moins ces sept constats, qui permettent de réfléchir aux enjeux liés à l'activité mathématique déployée en classe, au vécu des élèves, aux relations maître-élèves :

1. Tous les élèves aiment ce type d'activité. Pour la grande majorité des élèves, il s'agit d'un jeu, d'une énigme, d'un défi lancé à la classe; c'est une activité motivante, dans laquelle le maître entre "derrière l'élève". Point n'est besoin de "vendre" le produit...il se vend très bien tout seul!

2. Très spontanément, les élèves partent seuls à l'aventure, comparant entre eux les résultats finaux ou intermédiaires obtenus. Les conflits sont intéressants et favorisent d'autres échanges mettant en relief la complémentarité des travaux individuel et collectif.

3. Le maître intervient fort peu par la parole. En revanche, son rôle est important en tant qu'animateur et observateur du jeu: c'est lui qui relance les élèves partis sur de fausses pistes, non en leur fournissant une réponse toute

faite, mais par des questions judicieuses permettant de ne jamais être découragés...c'est ici qu'intervient l'erreur comme source d'apprentissage, comme nouveau point de départ!

4. Les élèves, le plus souvent autonomes, en discutant à certains carrefours de la recherche avec d'autres camarades, sont contraints d'être clairs pour comprendre et être compris. L'écoute de l'autre est primordiale...et pas toujours immédiate.

5. Les élèves n'ont pas le souci du temps. Peu importe, finalement, qu'on ait entièrement rempli la grille ou pas, ni surtout qu'on l'ait remplie du premier coup ou une heure après les autres! Ce qui compte, c'est ce qu'on y découvre, ce sont les ponts qui peuvent s'établir entre cette grille-jeu et les activités plus classiques de la mathématique. Une telle activité casse le mode comparatif si présent et destructeur lorsqu'il est signe de jugement et non de coopération.

6. Les élèves qui ont rempli une grille redemandent le plus souvent d'autres problèmes analogues, certains les font à domicile, en discutent avec leurs parents, parfois amusés, le plus souvent intéressés et "piqués au jeu"!
Sans trop s'avancer, on pourrait dire que ces élèves, qui poursuivent par jeu et par intérêt à domicile, s'entraînent sans en avoir l'air...dans les quatre domaines mathématiques évoqués ci-dessus. Mais à chaque fois, l'énigme est nouvelle, et chacun arrête selon ses propres besoins, selon son propre rythme.

7. Enfin, "last but not least", certains élèves sont très fiers que ces jeux soient tirés d'une revue "pour les grands"! Cette dernière remarque pose la question de la re-connaissance entre les générations, à l'école: il existe des problèmes mathématiques qui ne s'adressent pas seulement à une tranche d'âge donnée, mais à plusieurs.

Conclusion: essayez dans vos classes...même au secondaire supérieur ou avec des étudiants...vous serez étonnés!

LU POUR VOUS

MATHEMATIQUES AU FIL DES AGES
Textes choisis et commentés par J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel et M. Guillemot.
I.R.E.M. Groupe Epistémologie et Histoire. Gauthier-Villars, Paris 1987

Les mathématiques ne sont pas sorties toutes faites de la tête des mathématiciens comme le maître les écrit au tableau noir, achevées dans leur belle ordonnance. Elles ont une histoire, aussi longue que celle de l'humanité, inscrite dans nos civilisations et nos cultures.
Cette histoire est marquée de tensions, d'échecs, d'essais, de réorganisations et de synthèses. Sa découverte est indissociable d'une interrogation profonde sur la place des sciences dans notre société, de leur transmission et de leur enseignement.

En présentant des textes commentés de mathématiques - de l'Antiquité au XIXe siècle - les auteurs de "Mathématiques au fil des âges" permettent au lecteur de prendre en compte une dimension culturelle trop souvent oubliée dans la présentation scolaire.
Crayon à la main, esprit en éveil, laissez-vous entraîner dans un passionnant voyage... au fil des mathématiques.

Parmi les six grands chapitres de l'ouvrage: 1. objet et utilité des mathématiques, 2. arithmétique et théorie des nombres, 3. algèbre, 4.analyse, 5. calcul des probabilités, 6. géométrie; voici à titre d'exemples, quelques uns des nombreux sujets abordés:
- la décomposition des fractions dans le papyrus Rind - l'équation du second degré selon Brahmagupta ou en algèbre arabe - la critique des paradoxes de Zénon - l'apparition de la notion de fonction - Pascal et les jeux de hasard - etc.

Les commentaires, repères chronologiques, index biographique et bibliographique font de "Mathématiques au fil des âges" un exceptionnel outil de travail pour des enseignants ou étudiants.

A méditer:

Flo. (six ans et demi): "Aujourd'hui la maîtresse elle nous a fait travailler avec des p'tites cartes pour apprendre à compter de zéro à neuf ... elle doit pas savoir qu'on sait plus loin !"

Nouvelles de l'extérieur

CHAMPIONNAT DE FRANCE DES JEUX MATHEMATIQUES ET LOGIQUES

C'est reparti! Après le succès de l'année dernière, le championnat de France des jeux mathématiques et logiques est lancé, pour sa deuxième édition, de 1988. Le règlement et les premiers problèmes éliminatoires sont publiés dans le numéro 843 de Science & Vie de décembre 1987 et dans le numéro 48 de Jeux & Stratégie de décembre 87 et janvier 88.

Innovation: Afin de donner des chances égales à tous, les concurrents sont répartis en cinq catégories:
- élèves de 6e et 5e de collège (6e et 7e chez nous)
- élèves de 4e et 3e de collège (nos degrés 8 et 9)
- élèves de lycée (notre secondaire supérieur)
- professionnels (les professeurs de mathématiques et autres utilisateurs réguliers de mathématiques)
- grand public.

Le délai d'inscription, pour les éliminatoires, est fixé au 11 février. Aucun article du règlement n'exclut les Suisses ou les Neuchâtelois. Nous conservons donc encore toutes nos chances!

A titre d'exemples, voici quelques problèmes des épreuves éliminatoires:

Concours *Science & Vie*, première partie

1. Les trois factorielles

On appelle "factorielle n", et on note "n !" le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Ainsi, $1! = 1$; $2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, etc. Par convention, $0! = 1$.

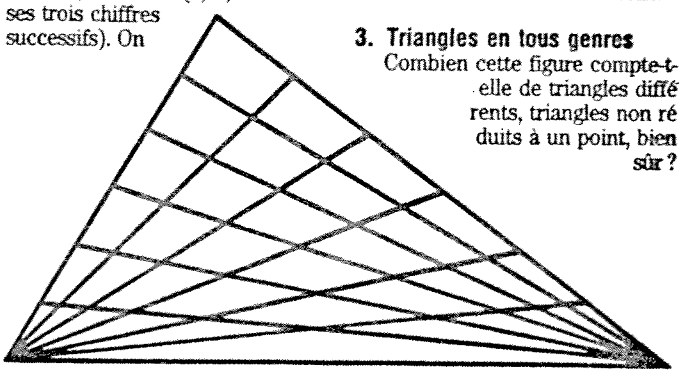
Trouver a, b, et c entiers compris entre 0 et 9, tels que le nombre $N = a! + b! + c!$ s'écrive, en système décimal, N = abc (a, b, et c sont ses trois chiffres successifs). On recherchera *toutes* les solutions.

2. Et toujours un carré !

Trouver N, nombre s'écrivant en système décimal N = abcd (a, b, c, d sont ses quatre chiffres successifs, a différent de U) tel que : N = abcd, P = cbad et Q = bcad soient, tous trois, des carrés parfaits. On recherchera toutes les solutions.

3. Triangles en tous genres

Combien cette figure compte-t-elle de triangles différents, triangles non réduits à un point, bien sûr ?



AGENDA

Séminaire de mathématiques élémentaires, Salle Argand, Institut de géologie, 2e étage,
Les mardi de 16h15 à 17h45: 9 et 23 février, 19 avril, 3, 17, 31 mai, 14 juin

Thème général: Jeu et enjeu des problèmes

Renseignements: André Calame, Ch. de Fresens, 2026 Sauges

Colloque du mardi, Institut de mathématique et d'informatique, Auditoire sud, 2e étage
Les mardi dès 16 h 15:

19 janvier 1988: P. Jarraud (IREM Raris VI)
Utilisation de PC pour les travaux dirigés de mathématique

26 janvier 1988: A. Valette (ULB Belgique)
Théorie des noeuds et biologie moléculaire

2 février 1988: D. Barsky (CNRS Paris VII)
La fonction gamma p-adique

9 février 1988: C. Goldstein (CNRS Paris)
Introduction à la théorie d'Iwasawa

Renseignements: Alain Robert, Inst. de mathématique et d'informatique, Chantemerle 20 cp 2, 2007 Neuchâtel.

Introduction à la connaissance des métaux: Institut de métallurgie structurale
Les mercredi après-midi de 14H15 à 18h : 9 et 23 mars 1988
Renseignements et inscription auprès de G. Gast, 5, rue E. Argand, Neuchâtel

FORUM MATHEMATIQUE XI

Le onzième Forum mathématique suisse s'est tenu du 16 au 18 novembre 1987 à Locarno. Il a réuni 120 participants, de tous les cantons, sur le thème de la **différenciation dans l'enseignement des mathématiques.**

Dans l'attente du rapport officiel, qui paraîtra en mai ou en juin 1988, voici quelques questions soulevées dans les groupes de discussion:

- Veut-on viser les mêmes objectifs pour tous les élèves d'une même clase?
- Chaque élève doit-il faire les mêmes activités que ses camarades?
- Peut-on envisager des travaux individuels conduits de façon autonome par les elèves ?
- Etc

Pour répondre à ces questions par des propositions pratiques, on a beaucoup parlé de "situations mathématiques", on a présenté des "ateliers" où les élèves travaillent de façon indépendante, on a entendu des maîtres de classes à degrés multiples présenter leurs moyens d'enseignement, un groupe s'est penché sur le "mastery learning".

Un document distribué propose une description d'un "coin mathématique" et de nombreuses activités de 5e et 6e: "Modalités pour une pratique autonome de la mathématique", coll. Pratiques, IRDP/87.2003, Neuchâtel 1987.

S O M M A I R E , No 0