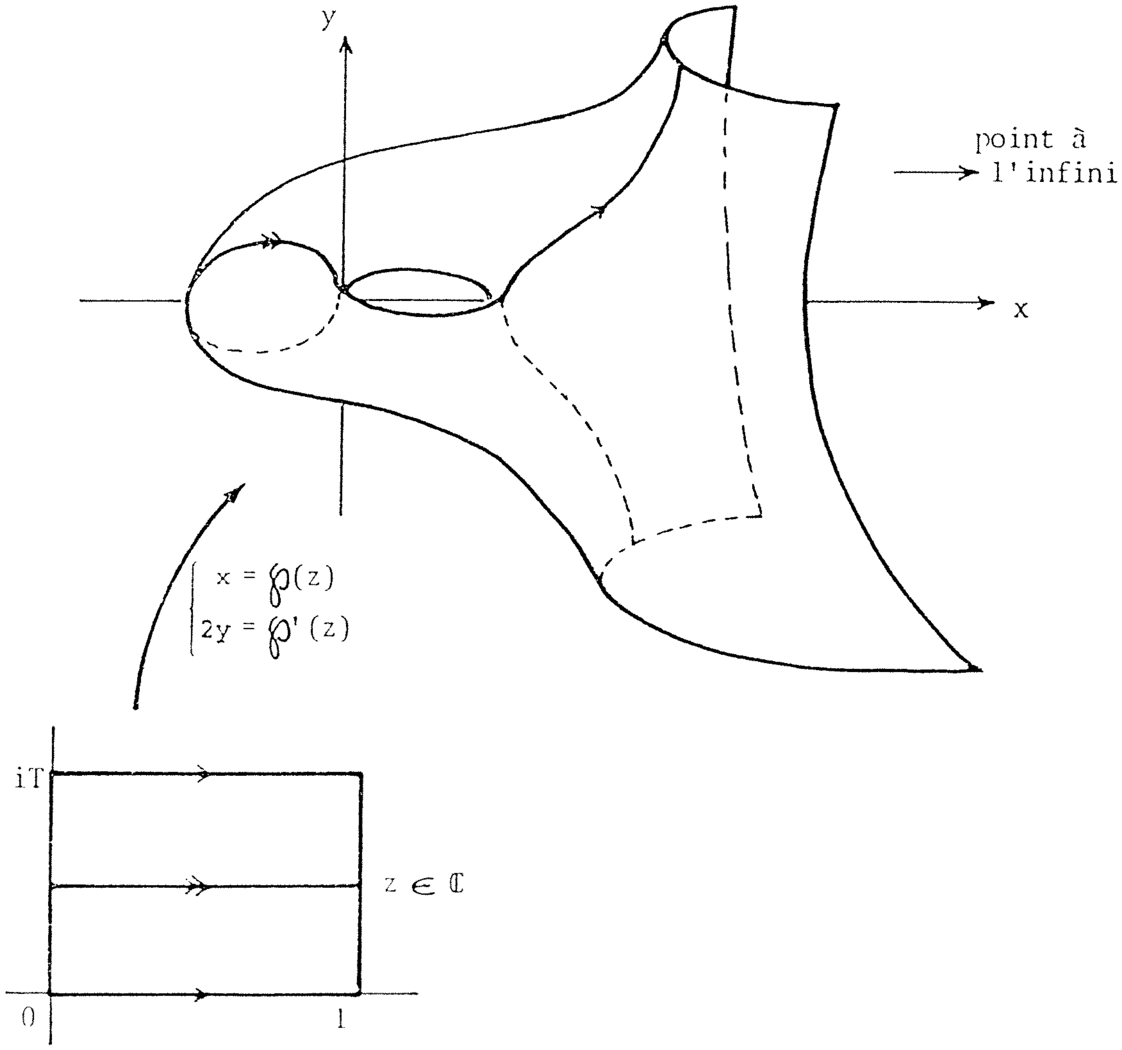
SOCIETE NEUCHATELOISE DES MAITRES DE MATHEMATIQUE, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE



BULLETIN no 1, AVRIL 1988

Edition: Société neuchâteloise des maîtres de mathématique, de physique et de chimie.

Equipe de rédaction: Jacques-André Calame, Michel Favre, François Jaquet, Françoise Jeandroz, Jacques Méry, Luc-Olivier Pochon, avec la collaboration de Louis Gagnebin (pour l'utilisation du Smaky).

Contact: Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts-Geneveys

Couverture: figure extraite de l'article de Alain Robert.

Délai pour transmettre vos contributions au prochain numéro: 15 sept. 1988

éditorial

PRECISER LE CAP

Il est encore trop tôt pour tirer un bilan de l'opération "bulletin". Toutefois divers échos nous sont déjà parvenus qui, joints à notre propre perception de la situation, nous permettent de fixer plus précisément quelques objectifs pour le développement de notre revue.

En voici une brève énumération:

- Aménager des canaux de prise d'information. Chacun devrait acquérir le réflexe d'envoyer au bulletin les informations d'intérêt général dont il a connaissance (séminaires, congrès, revues, colloques ...). Il faut également que l'équipe de rédaction découvre les bonnes adresses !

- Elargir le champs des sujets traités. Les premières rubriques qui ont été ouvertes relèvent surtout des mathématiques, ce que certains déplorent; c'est bien naturel. Nous nous employons à rechercher des articles dans d'autres domaines scientifiques. Par ailleurs, nous rappelons que des remarques diverses ou des notes didactiques peuvent aussi servir à ouvrir une rubrique qui serait souhaitée.

- Améliorer la qualité de la présentation et du tirage. L'important pour un bulletin est d'être lu plutôt que vu. Toutefois, il est aussi vrai qu'une présentation de qualité incite à la lecture. Si vous vous intéressez à la micro-édition (avec votre classe pourquoi pas ?), ne manquez pas de prendre contact avec l'équipe de rédaction !

- Assurer le financement du bulletin. Le bulletin est susceptible d'intéresser des personnes qui ne font pas partie de la société. Un tirage assez large doit donc être prévu, pour le moins dans cette année de lancement. Les cotisations ne sauraient couvrir l'ensemble des frais occasionnés par le journal. Diverses solutions sont actuellement envisagée par le comité: abonnement, dons, publicité, ...

Nous remercions les collègues qui nous ont fait part de leur remarques, conseils, voire encouragements ou qui le feront à la parution de ce numéro.

L'équipe de rédaction

Comment obtenir le bulletin ?...

C'est très facile !

Il n'y a pas qu'une seule manière ... il y en a trois ...

1) En devenant membre de la Société

2) En vous abonnant (10 Frs)

3) Par échange

Comment obtenir le bulletin

Pour vous abonner au bulletin adressez-vous à:

Michel Favre, rte de la Jonchère 13a,
2208 Les Hauts Geneveys (038/ 53 38 81)

Pour demander votre adhésion à la Société neuchâteloise des maîtres de mathématique, de physique et de chimie prenez contact avec le président:

Gérard Gast, 5, rue Emile Argand, 2000 Neuchâtel (038/ 25 04 07) mathématique

QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES ? (2e partie)

Alain ROBERT

Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
CH-2000 Neuchatel

3.- NOMBRES CONGRUENTS

Fermat a démontré que l'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers n'est jamais un carré parfait $S \neq \square$. Il l'a fait par "descente infinie" dans la fameuse marge de son exemplaire du Diophante... (une démonstration élémentaire se trouve dans J. Itard, Cf. Bibliographie).

Similairement,

$S \neq 2\,\square$ (Viète, Bachet) ,

$S \neq 3\,\square$ (Lucas) .

Considérons maintenant le triangle rectangle obtenu par la méthode de Pythagore avec

$$a = 9 \ , \quad a^2 = 81 = 2.40 + 1 \ , \quad b = 40 \quad \text{et} \quad c = 41 \ .$$

Son aire est

$$S = 9.20 = 5.36 = 5.\square \ .$$

En divisant par 6 les dimensions linéaires de ce triangle, on aboutit au triangle rationnel

$$a = 3/2 \ , \quad b = 20/3 \quad \text{et} \quad c = 41/6$$

d'aire entière $S = 5$. Ce triangle avait déjà été construit par Fibonacci (Leonardo Pisano) (1220). Comme on l'a vu, l'aire d'un triangle rectangle entier est un nombre pair, donc $S = 5$ ne peut être l'aire d'un triangle rectangle entier. Le résultat de Fermat montre que $S \neq 1$ pour tout triangle rectangle rationnel (donc aussi $S \neq 4$ pour tout triangle rectangle rationnel). Avec les résultats de Bachet, Viète et Lucas, on voit donc que

> 5 est le plus petit entier qui apparaît comme aire d'un triangle rectangle à côtés rationnels.

<u>Quels sont les entiers qui apparaissent comme aires possibles de tels triangles</u> ?

Classiquement, ces entiers sont appelés <u>nombres congruents</u>. Donnons-en une caractérisation arithmétique. La relation

$$c^2 = a^2 + b^2$$

montre que

$$c^2 \pm 2\,ab = (a \pm b)^2 \quad .$$

En travaillant avec des nombres rationnels a, b et c, on peut diviser par 4 cette relation et obtenir

$$(c/2)^2 \pm S = [(a \pm b)/2]^2 \quad .$$

Les nombres congruents sont les entiers $S > 0$ tels qu'il existe trois nombres rationnels α, β et γ avec

$$\gamma^2 - S = \alpha^2 \quad \text{et} \quad \gamma^2 + S = \beta^2 \quad .$$

Les trois carrés rationnels α^2, γ^2 et β^2 sont à égale distance S l'un de l'autre. Léonardo Pisano écrivait par exemple

$$(3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6})^2 + 5 = (4 + \frac{1}{12})^2 \quad ,$$

$$(3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6})^2 - 5 = (2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})^2 \quad .$$

On sait aujourd'hui que les équations:

$$\gamma^2 - 5 = \alpha^2 \quad \text{et} \quad \gamma^2 + 5 = \beta^2$$

n'ont que quatre solutions en nombres rationnels ayant des numérateurs et dénominateurs à moins de 50 chiffres! D'autre part, ces équations ont une infinité de solutions rationnelles. Depuis plusieurs siècles, les mathématiciens ont essayé de trouver les plus petits nombres congruents et Euler semble avoir été le premier à donner un triangle rectangle rationnel d'aire 7: il s'agit de

$$a = 24/5 \quad , \quad b = 35/12 \quad \text{et} \quad c = 337/60 \quad .$$

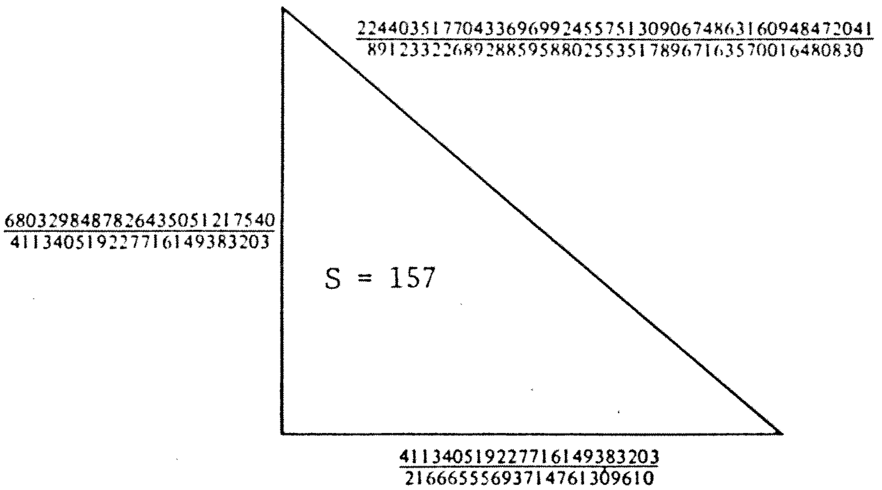
Les premiers nombres congruents sont ainsi

$$5 \ , \ 6 \ , \ 7 \ , \ \ldots$$

Voici un triangle rectangle

$$a = 6 + \frac{3}{20} \quad , \quad b = 13 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad c = 14 + \frac{41}{60}$$

dont l'aire est $S = 41$. Donc 41 est un nombre congruent! On peut montrer que 157 est un nombre congruent: le triangle rectangle rationnel le plus simple ayant pour aire 157 a été déterminé par D. Zagier.



On conçoit bien maintenant la difficulté de déterminer les nombres congruents! On appréciera donc d'autant mieux le critère fourni par Tunnel (Princeton) en 1983. Voici comment il s'énonce. Considérons les deux séries

$$\theta(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x^{n^2} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} x^{n^2} =$$

$$= 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots \quad ,$$

$$g(x) = x \prod_{n \geq 1} (1 - x^{8n})(1 - x^{16n})$$

puis les deux développements

$$g(x)\ \theta(x^2) = x + 2x^3 + x^9 - 2x^{11} - \dots = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \quad ,$$

$$g(x)\ \theta(x^4) = x + 2x^5 - x^9 - 2x^{13} + \dots$$

$$= \sum_{n \geq 1} b_n x^n$$

Alors Tunnel démontre le résultat suivant

<u>THEOREME</u>. *Soit n un entier positif sans facteur carré. Alors:*

$$a_n \neq 0 \Longrightarrow n \text{ } \textit{n'est pas congruent,}$$

$$b_n \neq 0 \Longrightarrow 2n \text{ } \textit{n'est pas congruent.}$$

Ainsi, par exemple, $a_1 = 1$ montre que 1 n'est pas congruent (Fermat). De même $b_1 = 1 \Longrightarrow 2$ n'est pas congruent, $a_3 = 2 \Longrightarrow 3$ n'est pas congruent. Comme $4 = \square$ ce n'est pas un nombre congruent non plus !

Pour démontrer ce théorème, Tunnel se base sur des résultats récents obtenus dans la théorie des courbes cubiques (aussi appelées courbes elliptiques, Cf. ci-dessous) par différents mathématiciens (Shimura, Waldspurger, Gross, ...). Une célèbre conjecture formulée en 1962 par Birch et Swinnerton-Dyer permettrait de démontrer que les conditions données par Tunnel caractérisent entièrement les nombres congruents, justifiant l'appellation de "critère" parfois donnée au théorème de Tunnel. Précisément cette conjecture permettrait de montrer qu'inversement

n impair sans facteur carré et $a_n = 0 \Longrightarrow$ n congruent,

n pair sans facteur carré et $b_{n/2} = 0 \Longrightarrow$ n congruent.

Remarquons encore que l'ensemble des triangles rectangles rationnels est dénombrable. On peut donc en dresser une liste exhaustive en établissant pour chacun d'entre eux la surface. On obtiendra ainsi une liste de tous les nombres congruents ... Mais si n est un entier donné (positif sans facteur carré, par exemple 157) on ne sait pas a priori combien de temps attendre pour le voir apparaître ou pour décider qu'il n'apparaîtra plus! A cet égard, le théorème de Tunnel donne une condition extrêmement simple pour démontrer qu'un entier n'est pas congruent. Pour un entier n grand, on peut même remarquer qu'il existe un logiciel "MacSyma" permettant d'effectuer des calculs littéraux et qui serait capable de donner rapidement les coefficients a_n et b_n .

4.- RELATION AVEC LES COURBES ELLIPTIQUES

Le problème de savoir si un entier S (positif, sans facteur carré) est un nombre congruent se ramène à un problème diophantien sur une cubique. Voici pourquoi. Dire que S est congruent revient à dire que le système d'équations

$$x = \square \quad , \quad x + S = \square \quad \text{et} \quad x - S = \square$$

possède une solution rationnelle $x \in \mathbb{Q}$. Lorsque ceci est le cas, il est clair que

$$x\,(x + S)\,(x - S) = x\,(x^2 - S^2)$$

est un carré rationnel > 0 et donc on peut trouver un couple (x, y) formé de nombres rationnels satisfaisant

$$y^2 = x(x^2 - S^2) \quad \text{et} \quad y > 0 \quad .$$

Autrement dit, on peut trouver un point à coordonnées rationnelles sur la cubique d'équation

$$y^2 = x\,(x^2 - S^2) \qquad ,$$

point qui ne soit pas sur l'axe des x. Inversement, tout point (x, y) à coordonnées rationnelles et y > 0 sur cette cubique fournit un triangle rectangle rationnel d'aire S selon les formules

$$a = \frac{|S^2 - x^2|}{y} \quad , \quad b = \frac{2\,|x|\,S}{y} \quad \text{et} \quad c = \frac{S^2 + x^2}{y}$$

Résumons.

<u>THEOREME</u>. *Soit* S > 0 *un entier sans facteur carré. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) Il existe un triangle rectangle à côtés rationnels et d'aire S, *ii)* *S est un nombre congruent, i.e. il existe trois nombres rationnels* α, β *et* γ *avec*

$$\gamma^2 - S = \alpha^2 \quad \text{et} \quad \gamma^2 + S = \beta^2 \quad ,$$

iii) *Sur la cubique d'équation*

$$y^2 = x\,(x^2 - S^2)$$

il y a un point $P = (x, y)$ *à coordonnées* x *et* y *rationnelles avec* $y \neq 0$.

Par exemple, le point de coordonnées

$$x = 41^2/7^2 \quad , \quad y = 2^4.3^2.5.41/7^3$$

est sur la cubique

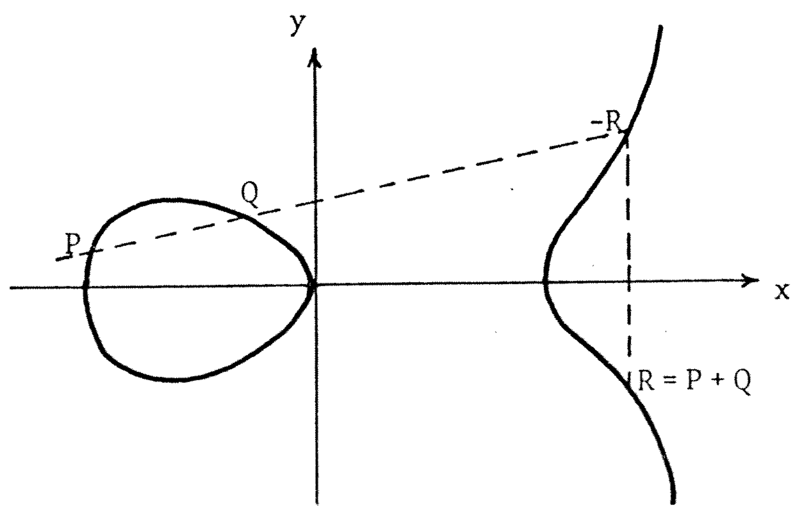
$$y^2 = x\,(x^2 - 31^2) \quad .$$

Donc 31 est un nombre congruent !

Revenons à l'étude d'une cubique de la forme

$$y^2 = x\,(x^2 - S^2)$$

où S est fixé. Il est facile de se faire une idée de l'ensemble des couples $P = (x, y)$ à coordonnées réelles sur cette cubique. Cette courbe est symétrique relativement à l'axe des x et on trouve deux points $(x, \pm y)$ au-dessus des valeurs de x rendant strictement positive $x\,(x^2 - S^2)$. On trouve donc des valeurs au-dessus des valeurs de $x \in [-S, 0]$ et $x \in [S, \infty]$.



On sait depuis le XIXème siècle que si on ajoute un point à l'infini jouant le rôle d'élément neutre, l'ensemble des points (réels) sur la cubique est un groupe abélien pour la loi d'addition donnée par

a) $P_1 + P_2 + P_3 = e = (\infty) \iff P_1, P_2$ et P_3 alignés ,

b) $P = (x, y) \iff -P = (x, -y)$.

En d'autres termes, la somme de deux points P et Q sur la cubique s'obtient en prenant le symétrique R du troisième point d'intersection avec la droite reliant P et Q (Cf. dessin). Lorsque $P = Q$, la droite les reliant est naturellement remplacée par la tangente en P à la cubique: le point $2P = P + P$ est donc le symétrique du troisième point d'intersection de la tangente en P à la cubique.

Remarque. Lorsque S est un nombre rationnel, il est facile de voir que si P et Q ont des coordonnées rationnelles, il en est de même de $P + Q$ (même si $P = Q$) et l'ensemble des points à coordonnées rationnelles forme un sous-groupe de l'ensemble des points à coordonnées réelles sur la cubique. On a vu comment à tout point rationnel $P = (x, y)$ avec $y > 0$, on peut associer un triangle rectangle rationnel d'aire S. De plus, on a aussi montré comment à ce triangle rectangle rationnel, on peut associer un point rationnel sur la cubique. Les calculs montrent qu'on obtient en fait le point 2P.

Résultats. *Supposons que S est un entier sans facteur carré. Alors le groupe des points rationnels sur la cubique* $y^2 = x(x^2 - S^2)$ *est un groupe de type fini isomorphe au produit du groupe d'ordre 4:* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *par un groupe libre* $\mathbb{Z}^r$ *(r entier* ≥ 0 *).*

Le sous-groupe d'ordre 4 est constitué du point à l'infini (également neutre) et des trois points d'intersection avec l'axe des x. On trouvera donc un point rationnel sur la cubique avec $y > 0$ précisément lorsque $r > 0$, i.e. lorsque le groupe formé des points rationnels est infini. Les trois conditions du théorème ci-dessus sont donc encore équivalentes à:

> *iv) Sur la cubique d'équation*
> $$y^2 = x(x^2 - S^2)$$
> *il y a une infinité de points à coordonnées* x *et* y *rationnelles.*

C'est la détermination de l'invariant r, rang du groupe des points à coordonnées rationnelles sur la cubique, qui est si difficile. On ne connaît pas d'algorithme effectif pour calculer r en fonction de S ... autre que celui donné par la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (et qu'il serait même trop difficile d'expliquer ici ...).

Il est aussi très intéressant de considérer les points $P(x, y)$ à coordonnées complexes sur la cubique

$$y^2 = x(x^2 - S^2) .$$

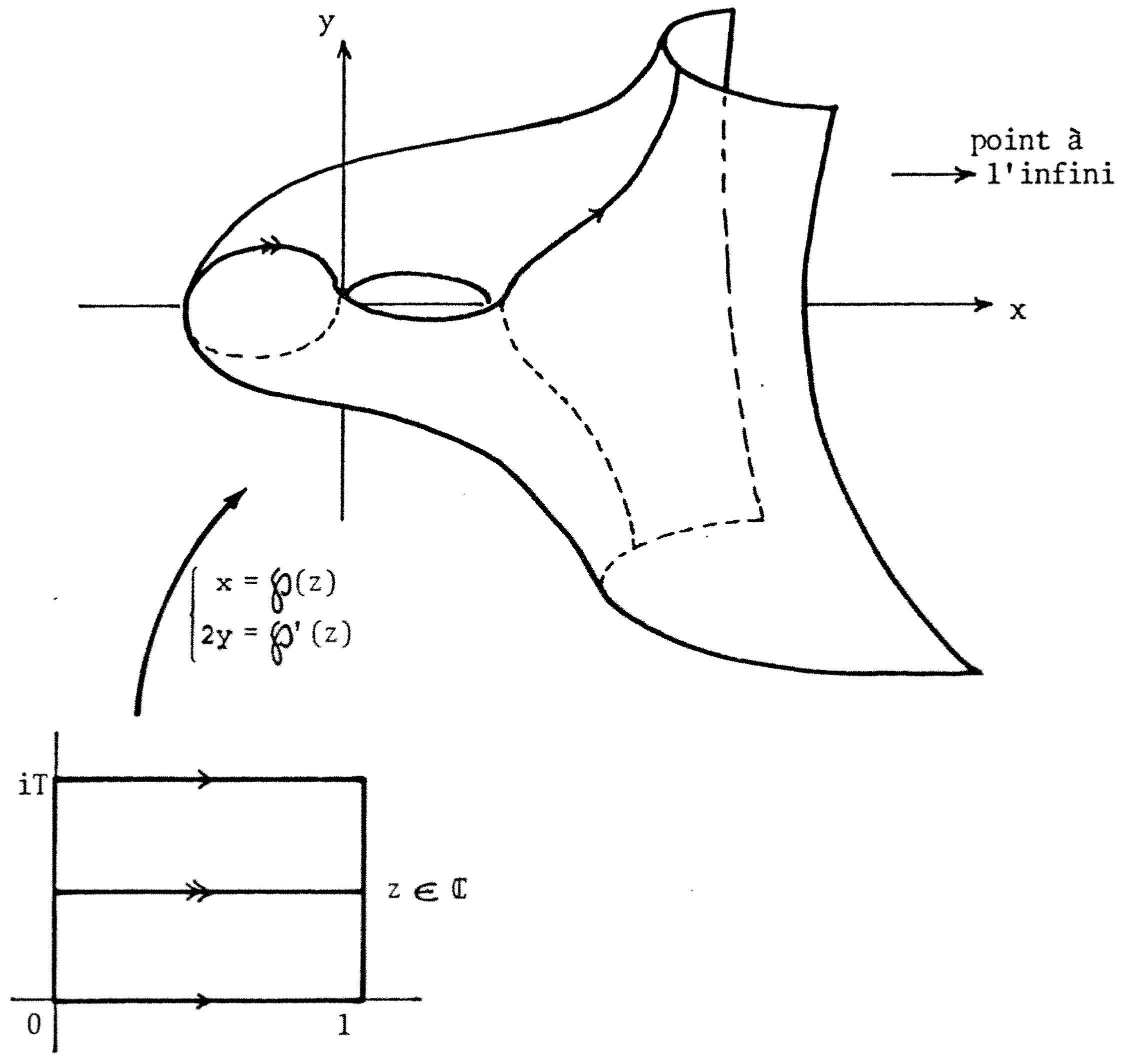
Ces points forment aussi un groupe dont la structure peut se déterminer par la paramétrisation suivante. Pour chaque $T > 0$, Weierstrass a construit une fonction transcendante, classiquement dénotée par $\wp$ qui est bi-périodique dans le sens suivant

$$\wp(z + 1) = \wp(z) = \wp(z + iT)$$

et qui présente un pôle double en chaque point du réseau $\mathbb{Z} + iT\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ (on devrait donc dénoter $\wp = \wp_T$). La dérivée de $\wp$ a les mêmes propriétés de périodicité que $\wp$ (mais présente des pôles triples où $\wp$ avait des pôles doubles !). Il se trouve que

$$z \longmapsto \left(\wp(z), \tfrac{1}{2}\wp'(z)\right) = (x,\ y)$$

est une paramétrisation des points complexes sur une cubique $y^2 = x\,(x^2 - S^2)$ où S est une fonction de T. Dans cette paramétrisation, le point $z = 0$ (ou n'importe quel point z du réseau $\mathbb{Z} + iT\mathbb{Z}$) est envoyé sur le point à l'infini de la cubique et la somme dans $\mathbb{C}$ correspond à la somme sur la cubique par cette paramétrisation! Le groupe des points complexes sur la cubique est ainsi isomorphe au groupe additif $\mathbb{C}$ modulo le réseau $\mathbb{Z} + iT\mathbb{Z}$. C'est donc un tore (produit du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par lui-même $i\mathbb{R}/iT\mathbb{Z}$). On peut même se représenter la situation intuitivement. L'ensemble des points complexes $(x,\ y) \in \mathbb{C}^2$ situés sur la cubique est une surface réelle dans $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Par une projection convenable sur un sous-espace $\mathbb{R}^3$, on peut voir que cette surface est un tore topologique. On peut même prendre un sous-espace de dimension 3 contenant les deux axes réels $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^2$ et contenant donc le sous-espace $\mathbb{R}^2$ dans lequel on trouve les points à coordonnées réelles. Voici une illustration:



La situation est comparable à celle de la paramétrisation d'une équation $x^2 + y^2 = 1$ (cercle) par les fonctions trigonométriques usuelles $x = \cos z$, $y = \sin z$. Ces dernières présentent aussi une périodicité importante !

Weierstrass a d'abord rencontré les fonctions $\wp$ en essayant de calculer la longueur d'un arc d'ellipse, d'où le nom de "fonctions elliptiques" donné à ces fonctions. Le terme "elliptique" a ensuite été appliqué aux courbes paramétrées par ces fonctions elliptiques: en particulier, toutes les courbes cubiques planes non singulières sont des courbes elliptiques.

C'est l'étude des courbes elliptiques qui a tant progressé depuis 1960 et qui a permis à Tunnel d'obtenir son critère remarquable !

REFERENCES

La théorie élémentaire des nombres, triples pythagoriciens entre autres, est remarquablement bien expliquée dans

G.H. Hardy, E.M. Wright: *The Theory of Numbers*. Oxford at the Clarendon Press, nouveau tirage 1975.

On trouve une démonstration du fait que l'aire d'un triangle rectangle entier n'est jamais un carré dans

J. Itard, *Arithmétique et Théorie des Nombres*. Que sais-je ? N° 1093, PUF 1967.

Voici la référence à l'article de base:

J.B. Tunnel, *A Classical Diophantine Problem and Modular Forms of Weight 3/2*. Invent. Math. 72 (1983) pp. 323-334.

Un survol de résultats préliminaires est donné dans

J. Coates, *The work of Gross and Zagier on ...* Sém. Bourbaki. Nov. 1984 exposé 635 (à paraître dans "Astérisque").

Voici un livre qui expose systématiquement toute la théorie utilisée par Tunnel:

N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Springer-Verlag, 1984, Graduate Text in Math. Nb. 97.

Un autre exposé introductif à la théorie des fonctions et courbes elliptiques est:

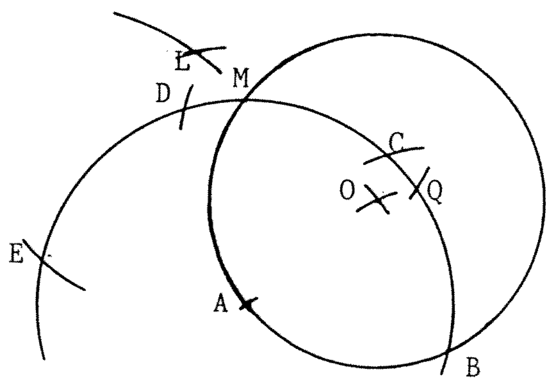
A. Robert, *Elliptic Curves*. Springer Verlag, Lect. Note in Math. N° 326 (2nd corrected ed. 1985).

mathématique

CONSTRUCTIONS DE MASCHERONI OU LA GEOMETRIE DU COMPAS
(2e partie)

Françoise Jeandroz

1.Recherche du centre d'un cercle:



Solution:

Deux points A et B du cercle.

(A ; AB) ∩ (C) = M

AB = BC = CD = DE

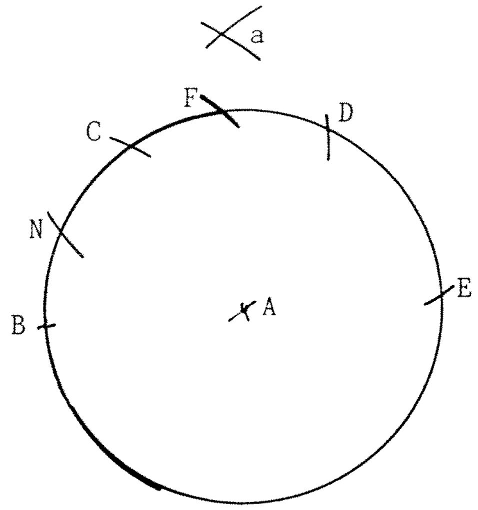
(E ; EM) ∩ (A ;EM) = L

(L ; LA) ∩ (A ;AB) = Q

(B ; BQ) ∩ (A ; BQ) = O

2. Duplication du cube:

C'est à dire trouver un segment égal à la racine cubique d'un segment donné.



Solution:

(A ;AB)

AB = BC = CD = DE

(B ; BD) $\cap$ (E ;BD) = a

(B ; Aa) $\cap$ (A ; AB) = F

(F ; AB) $\cap$ (A ; AB) = N

aN $\cong \sqrt[3]{2}$. AB

Ces exemples de constructions du compas sont extraits du cours donné par G . Charrière au printemps 87 organisé à Bienne par le CIM.

Réflexion: Dans quelle mesure certaines de ces constructions peuvent-elles être exploitées en classe ?

informations

Rencontres ESRN - Ecoles professionnelles

Durant l'automne passé, des groupes de travail constitués d'enseignants des Ecoles professionnelles (CPLN, CPMBC) et de l'ESRN réunis sur l'initiative des directions des écoles concernées se sont penchés sur le "douloureux" passage de l'école obligatoire à l'école professionnelle. Trois groupes (mathématique théorique, mathématique appliquée, sciences expérimentales) ont traités des disciplines concernant notre notre société.

Les objectifs de ces rencontres étaient principalement les suivants:

- Recherche des notions ou objectifs ne figurant pas dans les programmes de l'enseignement secondaire inférieur et jugés utiles pour entreprendre une formation professionnelle.

- Comparaison des méthodes, des pratiques pédagogiques, du symbolisme et du vocabulaire utilisés.

- Etude des épreuves, tests de sélection, examens d'entrée, notes scolaires et comparaison des exigences.

- Harmonisation du passage de l'école obligatoire à l'école professionnelle, étude de la proposition "de l'école obligatoire tremplin d'une formation continue et permanente".

De nombreuses constatations ont été faites qu'il n'est pas possible de reprendre ici mais qui pourront être développées dans de prochains numéros. Retenons pour le moment que, malgré certaines divergences de vue qui peuvent demeurer, la volonté existe de trouver des moyens qui favorise au mieux les élèves qui entreprennent une formation professionnelle. Il est souhaité que les contacts puissent être maintenus entre les diverses institutions.

Des exemplaires du rapport complet peuvent être obtenus auprès de Maurice Wermeille, président du Comité de direction de l'ESRN, Collège du Mail (038/ 25 92 62). **lop**

CHAMPIONNAT DE FRANCE DES JEUX MATHEMATIQUES ET LOGIQUES

Six participants de l'Ecole secondaire de la Chaux-de-Fonds ont passé le cap des éliminatoires et se sont vus convoquer pour les demi-finales, à Thonon et ... Limoges! (Il ne s'agit pas du Championnat de France de géographie.) Après quelques démarches laborieuses, on a finalement découvert parmi les trente centres de demi-finales une ville moins éloignée: Morteau!

Le temps maussade de ce samedi après-midi 19 mars, les salles froides et austères d'un lycée vide, la gêne et les craintes des quatre-vingt participants venus d'horizons très divers, le désoeuvrement des accompagnants, toutes les conditions étaient réunies pour l'exercice consistant à s'échiner durant trois heures sur six casse-têtes, sans calculatrice.

Après l'épreuve, l'ambiance était chaleureuse. En attendant les classements, on commentait ses résultats, on découvrait ses fautes de calcul, ses erreurs et oublis, on cherchait ensemble les solutions non encore trouvées.

En catégorie "Collèges", J. Laesser (3e S, la Chaux-de-Fonds) est sorti premier, en résolvant correctement cinq des six problèmes suivants, en 2h15. Seuls le renard et le chien ont résisté à sa perspicacité. On lui souhaite bonne chance pour les finales, en juin, à Paris. **fj**

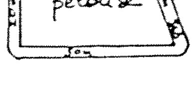
LE RENARD ET LE CHIEN
(Coefficient 4)

Un renard est poursuivi par un chien. Il a 27 bonds d'avance. Or, 3 bonds du renard valent en longueur, 2 bonds du chien. Et pendant que le chien fait 4 bonds, le renard en fait 5. En combien de bonds le chien rettrapera-il le renard?

|_|_|_| bonds

LA PISTE (Coefficient 3)

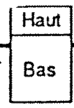
Une pelouse a la forme d'un quadrilatère dont les côtés mesurent 20, 40, 30, et 50 m. La commune décide de construire autour une piste de 5 m de large, le contour extérieur étant rectiligne, parallèle au bord de la pelouse, ou arrondi, le rayon du contour arrondi étant encore de 5 m.



Quelle est, au m^2 le plus proche, l'aire de la piste ?
On utilisera, si besoin, $\pi = 3,14$.

|_|_|_| m^2

LA TOUR INFERNALE
(Coefficient 5)

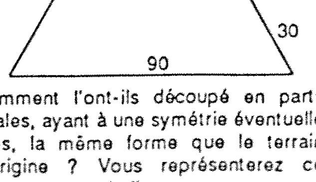


Dans cette tour de plus de 4 étages, réside un et un seul locataire par étage. Les charges quotidiennes de fonctionnement de l'ascenseur se répartissent comme suit : le locataire du premier étage paie 1 F, celui du 2^e étage 2 F, celui du 3^e : 3 F et ainsi de suite. Les locataires des étages du bas, réunis, paient autant que les locataires des étages du haut, réunis. Le total des charges ne dépasse pas 1988 F.
Combien y a-t-il d'étages dans cette tour ?

|_|_| étages

L'HERITAGE (Coefficient 1)

Quatre fils héritent un champ ayant la forme suivante, où les dimensions sont exprimées en mètres.



Comment l'ont-ils découpé en parts égales, ayant à une symétrie éventuelle près, la même forme que le terrain d'origine ? Vous représenterez ce découpage sur la figure.

HISTOIRE DE PEUGEOT
(Coefficient 6)

"Tient, c'est curieux", rugit Léo. Cette 305 a un numéro d'immatriculation intéressant . Que j'ajoute 304 ou 405 à ce nombre, le résultat est un carré parfait ! Quel est ce nombre ?

|_|_|_|_|

LOGICIENS ET MENTEURS
(Coefficient 2)

Alain, Bernard et Charles se rencontrent. Parmi eux, un "juste", qui dit toujours la vérité, un "roublard", qui ment toujours, un "ignorant" qui peut aussi bien mentir que dire vrai. Voici leurs affirmations :

Alain : "Bernard est le juste"
Charles : "Alain n'est pas le roublard"

Pouvez dire qui est qui ?

Juste	
Roublard	
Ignorant	

atelier math

UNE SITUATION MATHEMATIQUE: LES TROIS P'TITS TOURS

François Jaquet

Rapport sur une expérimentation conduite par un groupe d'enseignants de 4-5 P et 1 CO, dans le cadre d'un cours de formation continue, en septembre 1987.

Le choix de la situation est inspiré d'un article de "Math-Ecole" (no 114) qui décrit cette activité en classes de 4 à 6 P de Genève.

L'idée des "Trois p'tits tours" est de Gérard Charrière.

1. La situation, vécue par les maîtres

La consigne est présentée ainsi aux cinq maîtres qui participent à la séance:

"Voici trois nombres (5;3;2) obtenus par un lancer de dés.

Sur ce réseau quadrillé, à partir d'un sommet choisi, le point de départ, on convient de dessiner le cheminement suivant:

on avance de 5 pas, on fait un quart de tour à droite, on avance de 3 pas, on tourne d'un quart de tour à droite, on avance de 2 pas, on tourne, on avance de 5 pas (on a repris le premier des trois nombres donnés), on tourne, on avance de 3 pas, etc.

Allons-y! "

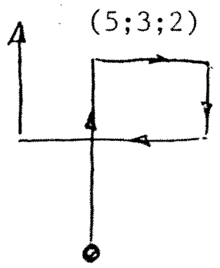


figure obtenue après les cinq premières étapes citées dans le texte

Pour des adultes, la consigne a été réduite au minimum. Ces quelques indications ont pourtant suffi à faire démarrer l'activité de chacun.

Commentaires et remarques, relevés dans l'ordre chronologique de leur expression:

Certains se mettent immédiatement à dessiner.

-"N'y a-t-il pas un risque de confusion, pour des élèves, entre cette notation (5;3;2) et celle des coordonnées dans l'espace qu'on vient d'étudier?"

-"A deux dés seulement, la recherche est-elle intéressante?"

-"On revient au point de départ après trois tours!"

-"Ca se referme de toute façon! Puisque ... (suit une explication orale, sans référence à un dessin, se fondant sur les déplacements "opposés" s'annulant sur les directions verticale et horizontale)."

"Y a-t-il une raison pour que ça se referme?"

La recherche a débuté depuis quelques minutes seulement. Ceux qui dessinent n'écoutent pas forcément les explications des autres qui sont souvent formulées sous forme de monologues.

-"On pourrait aller le faire en LOGO!"

-"Ces figures ont-elles des axes de symétrie? Y a-t-il toujours un centre de symétrie?" (Questions posées sur la base de plusieurs dessins déjà réalisés par ce participant.)

-"Combien y a-t-il de dessins différents?"

-"Peut-on faire des rectangles? On peut obtenir des carrés!"

-"Non, ce n'est pas possible de faire des rectangles!" (Affirmation d'un participant qui travaille mentalement, sans faire aucun dessin.)

-"Il y a des types "hélice" et des types "croisé"."

-"Il y a toujours quatre rectangles, emboîtés ou non."

-"Un rigolo! (2;2;3)" (v.figure)

-"Une croix suisse! (1;2;2)" (v. figure)

-"Normalement, (1;3;3) devrait être semblable à (3;5;5). Je vais essayer! ... Eh bien, non! Ce sont deux croix différentes."

-"Les croix sont de type (n;m;m), avec $m > n$."

-"Deux nombres égaux impliquent l'existence d'axes de symétrie."

-"L'ordre des trois nombres a-t-il de l'importance?"

-" (5;3;2) et (5;2;3) sont égaux!" (v. figure)

-"A une symétrie axiale près!"

-" (5;3;2) et (2;3;5) sont égaux globalement, le point de départ y est placé différemment."

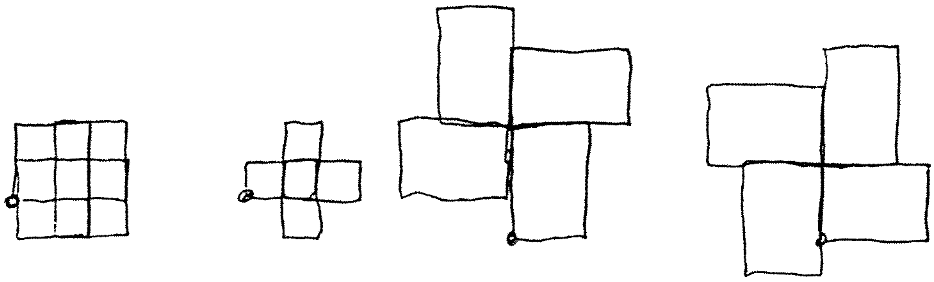
-"Peut-on faire des pavages?"

-"Avec quatre nombres, y aura-t-il des boucles?"

-"Avec cinq nombres, la boucle se refermera en quatre tours, avec six nombres elle se refermera en deux tours."

Après 30 minutes, les questions sont de plus en plus nombreuses. Chaque participant a plusieurs feuilles remplies de dessins.

(2;2;3) (1;2;2) (5;3;2) (5;2;3)



Chacun des participants présentera cette situation à ses élèves, dans les jours suivants, en les incitant à se poser des questions et à essayer d'y répondre. Les résultats, productions d'élèves, remarques et commentaires seront comparés lors de la prochaine rencontre, quinze jours plus tard.

2. La situation, vécue dans les classes

Chacun des participants a pu consacrer deux périodes, de 30 à 45 mn, à la situation des "Trois p'tits tours" au cours de la quinzaine écoulée.

Les modalités de présentation se révèlent assez semblables: à partir d'un ou deux exemples, dessinés par le maître au tableau noir, la consigne est comprise par la plupart des élèves en 5 à 10 minutes.

Ceux qui ont utilisé des dés pour le choix des nombres ont constaté que cette méthode n'était pas favorable à une prise en charge de la recherche par les élèves eux-mêmes. Certains subissaient les tirages et se contentaient de dessiner les figures imposées, sans chercher à les modifier ou à diriger les choix. Les dés ont été par conséquent abandonnés peu à peu, spontanément ou sur le conseil du maître.

Dans certaines classes, les recherches se sont étendues au cas de deux, quatre, cinq nombres.

Le principal obstacle rencontré par les élèves est le respect du sens de rotation. En 4-5 P, une majorité d'entre eux commettent de nombreuses erreurs; des interventions du maîtres, répétées, s'avèrent indispensables. Quelques-uns, en 4 P particulièrement, n'arrivent pas à se "décentrer" et à s'imaginer "à la place" du crayon qui avance sur le cheminement dessiné.
Ce type de difficultés entraîne des modifications de la tâche: pour les élèves qui ont de la peine, le problème n'est pas d'établir des relations entre les nombres donnés et les figures obtenues mais, simplement, d'arriver à des dessins qui se referment (avec trois nombres).
Avec quelques élèves de 4 P, peu avancés, il faut même renoncer à cette situation, considérée comme prématurée.

Dans les quatre classes de 1 CO, l'activité est intense pour tous les élèves, voire fébrile à certains moments: les questions fusent, les conjectures abondent (sans être valablement vérifiées dans de nombreux cas). La situation permet une autonomie de 30 à 45 minutes. Durant cette première période, le maître doit endiguer le flot des questions, faire corriger les erreurs individuelles, demander de vérifier les hypothèses émises ou de les expliciter, remettre sur la bonne voie ceux qui se sont égarés (ils sont rares), susciter des échanges et comparaisons entre élèves qui ont choisi les mêmes recherches. Aucun problème de discipline ou de motivation n'est relevé.

Pour les classes qui ont consacré deux périodes à cette situation, une synthèse commune a permis de comparer les premiers résultats trouvés, de susciter des échanges et justifications, d'ouvrir de nouvelles pistes de recherche et de structurer la suite des activités, en guise de relance.

Quelques problèmes que se sont posés les élèves à propos de ces "Trois p'tits tours", après la phase de découverte et d'assimilation des consignes:

" Comment faire un carré, un rectangle, une croix, etc ? - Est-ce que ça se referme toujours? - Comment trouver des hélices toujours plus grandes? - Faire une forme avec quatre nombres, qui se referme. - Est-ce que la figure change si on inverse les nombres? - Comment obtenir un quadrillage régulier, de combien de carrés ? - Combien y a-t-il de figures possibles? (Dans le cas de trois nombres déterminés par des dés.) - Faire des formes avec des axes de symétrie.

Tous ces problèmes n'ont pas reçu de solution complète ou correcte au sens du mathématicien adulte mais, en observant les productions d'élèves, on constate clairement une organisation de la démarche, certaines réussites ou échecs et surtout une prise en charge par l'élève de "son" problème, aussi élémentaire qu'il puisse paraître.

Les exemples qui suivent sont tirés d'une classe où, en vue d'une exploitation des résultats, une demande explicite avait été formulée en deuxième séance: noter clairement les trois rubriques "mon problème", "ma solution", "mes impressions".

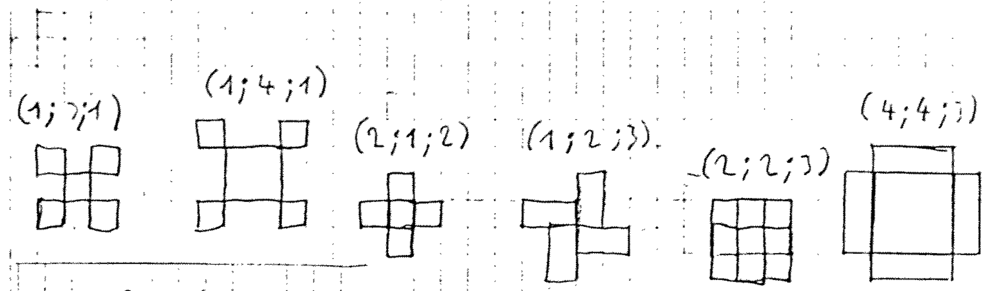
- (Yannick. 12 ans) Mon problème: comment faire une croix

  Ma solution: le premier nombre doit être le même que le dernier et celui du milieu ne doit pas être plus grand que le premier et que le dernier.

  Mon impression: le problème était assez facile et c'était bien.

Deux croix (3;1;3) et (4;2;4) sont dessinées sur la feuille de Yannick (trop peu contrastée pour être photocopiée) mais de nombreuses constructions ont été effacées ou effectuées en brouillon.

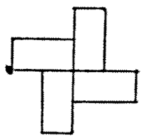
Mon problème : Comment faire un tourniquer en utilisat la première et la troisième cordonnés 1 et la deuxième quelle soit plus haute que 2.



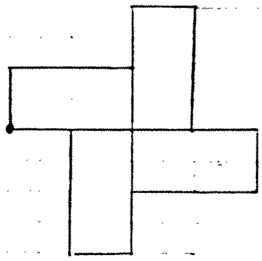
Claudio (11 ans)

Je trouve sa très amusant et j'aimerai qu'il aie des choses comme-sa dans le programme

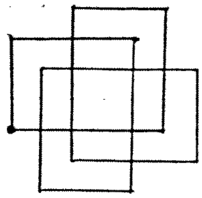
(1;2;3)



(2;4;6)

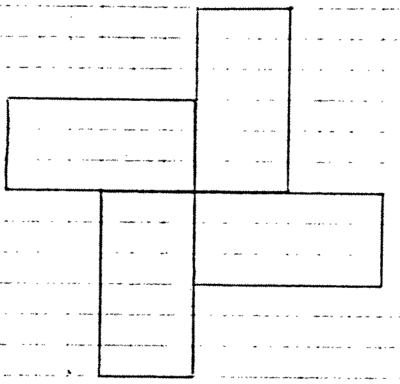


(3;4;5)

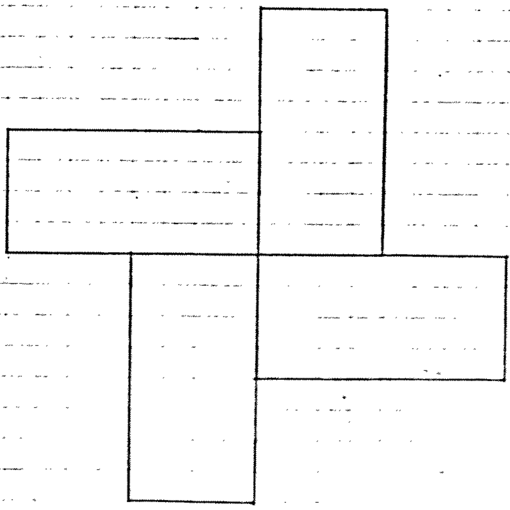


Mon problème: comment faire pour obtenir des élices toujour plus grande.
La solution: il faut doubler, puis tripler, puis quadrupler etc...
Mes impression: c'était facile.

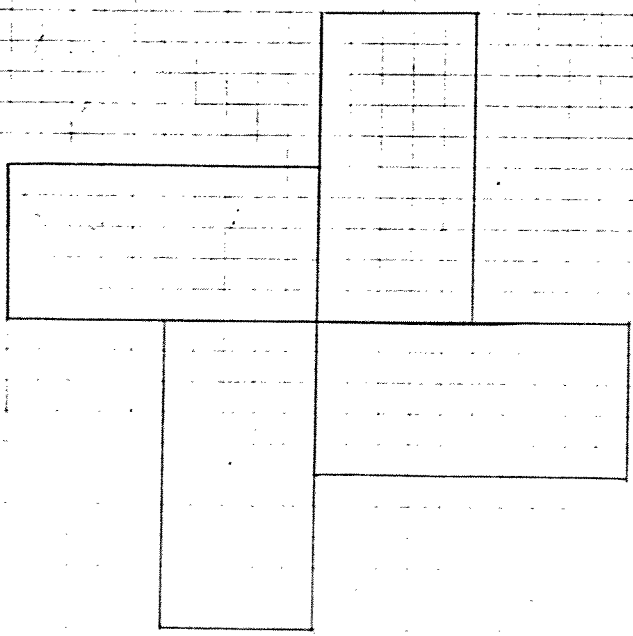
(3;6;9)



(4;8;12)



(5;10;15)



Catherine (11 ½ ans)

3. Discussion

Après avoir proposé une situation mathématique aux élèves de sa classe, observé leurs réactions, paré au plus pressé, relancé les activités, travaillé individuellement avec certains, examiné les productions écrites, etc, il reste au maître à évaluer le travail effectué!

Cette évaluation est personnelle, délicate. Elle apporte plus de questions que de réponses. Elle est indispensable pourtant.

Le groupe s'est livré à cet exercice, après que chaque participant a raconté le déroulement des activités dans sa classe. Voici quelques-unes des questions abordées dans la discussion, avec les remarques correspondantes et quelques bribes de réponse:

- L'écart entre "forts" et "faibles". Pour certains, la situation l'a creusé, ce qui est jugé regrettable. Pour d'autres, la situation n'a fait que le révéler car on ne peut pas nier les différences de développement intellectuel entre élèves d'une même classe.
  Aucune frustration n'a été relevée. Qu'ils aient éprouvé des difficultés ou non, tous les élèves ont travaillé avec intérêt et plaisir, à l'exception de deux "forts" qui "auraient préféré faire autre chose".
  La question qui reste ouverte est la suivante: faut-il chercher à combler les écarts ou, du moins, à éviter qu'ils apparaissent, ou faut-il au contraire les laisser se manifester?
  Les "Trois p'tits tours", comme toutes les situations mathématiques, favorisent évidemment une différenciation des activités des élèves puisque chacun traite des questions qui se rapportent à son niveau effectif, sans être freiné par des contraintes extérieures.

- L'observation du déroulement de la situation dans la classe. Le maître arrive difficilement à gérer la conduite des activités et à prendre le recul nécessaire à une observation objective. La plupart des expérimentations de situations rapportées dans la presse pédagogique font état de la présence d'un observateur. Peut-on mener une situation mathématique dans sa classe, sans faire appel à un collègue ou une personne extérieure pour observer et rapporter ce qui s'y passe?
  Les membres du groupe pensent qu'il faudrait essayer de se mettre à deux, sans le faire systématiquement, pour pouvoir juger par la pratique l'apport d'un observateur.

- Les acquisitions des élèves. Ce problème constitue la pierre d'achoppement de tout enseignant confronté aux situations mathématiques pour les premières fois. Le malaise s'exprime au travers de questions du type: on ne sait pas quels sont les objectifs atteints; qu'est-ce que l'élève a appris? comment va-ton faire le programme si on prend du temps pour ce type d'activité? les recherches hésitantes (particulièrement dans la phase de mise en train) ne vont-elles pas "désécuriser" l'enfant et nuire aux apprentissages? etc.
  Les premières esquisses de réponses, pour rassurer, sont du genre: le temps passé est investi judicieusement puisque l'élève trouve du plaisir (dans une discipline ou il n'a peut-être connu que des échecs précédemment), prend confiance en soi, modifie son attitude par rapport aux mathématiques; les objectifs ne peuvent être "programmés" par le maître mais l'élève en atteint de très nombreux, qu'on n'attendait pas et qui, souvent, ne figurent pas dans les listes d'objectifs du programme!

  A ce propos, un rapide inventaire - non exhaustif - des notions intervenues dans la situation des "Trois p'tits tours" montre que son apport n'est pas négligeable:
  - axe et centre de symétrie d'une figure - combinatoire (dénombrement de tous

les dessins différents qu'on peut obtenir à partir de trois dés) - proportionnalité (agrandissements systématiques d'une figure, v. Catherine, p.19) - conjectures et vérifications - sens de rotation lors d'un déplacement dans le plan.

Chacune de ces notions pourra être reprise lors de l'étude des chapitres où elle apparaît explicitement, la situation faisant office, alors, de point de départ.

- Les conditions d'acquisition de connaissances. Pour que la situation ne "tourne pas sur elle-même" ou ne dégénère pas en activité "gratuite", une analyse de son déroulement et des productions des élèves semble nécessaire. Les discussions au sein du groupe n'ont pas encore permis de tirer des règles ou conclusions à ce propos. Quelques suggestions ont toutefois été évoquées:
  - les "règles du jeu" de la situation (comment les préciser, selon quels critères?) - le rôle de la communication entre élèves (justifications mutuelles de leurs résultats, nécessité de moments de synthèse commune) - l'attitude du maître (l'équilibre difficile à trouver entre la passivité et l'intervention qui "démobilise" l'élève).

- La charge de travail du maître. Pour cette première expérimentation d'une situation mathématique, le temps de préparation et d'évaluation est de quatre heures environ, réparti ainsi: deux réunions (3 h), lecture d'articles, analyse et examen des productions d'élèves.

Ce premier rapport du groupe n'appelle pas de conclusions puisque la plupart des questions restent ouvertes, à l'image de celles que chacun peut se poser en pratiquant soi-même les "Trois p'tits tours". Son but est de relancer le débat, de poursuivre les essais et de donner envie à d'autres de se lancer à leur tour dans ce type d'activité ou de se joindre au groupe.

Quelques éléments de référence bibliographique:

- Corthesy-Ferrari-Rochat-Bernet-Christen-Tenthorey Pédagogie des situations en mathématique, quelques points de départ, observation, évaluation. CVRP Lausanne, 1985

- Chastellain-Jaquet-Michlig. Mathématique 5e et 6e année, livres du maître et de l'élève, thème "Ateliers de mathématique". Office romand des éditions et du matériel scolaire, 1984 et 1985.

- Groupe mathématique du Service de la recherche pédagogique. Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, SRP no 25, Genève, 1983

- IRDP Situations mathématiques, compte rendu d'une journée d'étude de la commission d'évaluation de l'enseignement de la mathématique (CEM). IRDP/R 81 1054 a. 1981

- Arsac-Germain-Mante-Pichod. La pratique du problème ouvert. IREM de Lyon 1985.

- Math Ecole no. 111, 112, 114, 116, 118, 119, 120, 122, 128, 129

- Centre vaudois de l'enseignement mathématique. Publications du groupe TFL.

lu pour vous

D'Albert Jacquard :

MOI ET LES AUTRES (Initiation à la génétique)

Edition Virgule, Collection Point.

Ce livre ne traite pas d'un sujet de mathématique ou physique, mais il parle de l'homme.

Je pense que ce livre nous émerveille sur les possibilités de l'homme, champion de la complexité et de l'autostructuration. Il nous montre à quel point l'homme est co-auteur de lui-même. A nous de créer.

Les questions fondamentales abordées nous éclairent sur l'inné, l'acquis, les races, la comparaison des intelligences, les dons, etc.

Nous prenons conscience que chacun de nous est unique dans l'aventure que nous vivons et qui nous façonne.

J'espère que tout enseignant prendra le temps de lire cet ouvrage de 140 pages et qu'il incitera également ses élèves à le découvrir.

Chacun y trouvera un réconfort sur ses propres possibilités car les lois de la vie sont merveilleuses et l'auteur sait si bien nous le démontrer.

Albert Jacquard dirige le service de génétique de l'Institut national d'études démographiques et enseigne dans diverses Universités parisiennes et étrangères. Il joue un rôle actif au sein du Mouvement universel pour la responsabilité scientifique.

Parmi ses nombreux ouvrages, citons le dernier paru sous sa direction :

"Les scientifiques parlent...", chez Hachette. **mf**

nouvelles de l'extérieur

Le Laboratoire de Didactique et Epistémologie des Sciences de l'Université de Genève (Prof. André Giordan), organise des séminaires (en général le mardi après-midi de 17h30 à 19h) qui ont trait aux problèmes de didactique des branches scientifiques.
Au programme de ce semestre d'été:

- Analyses d'études sur les objectifs scientifiques (A. Giordan).
- Comment présenter la complexité de façon simple ? (M. Gonzalez).
- Présentation de petits matériels scientifiques pour l'initiation à l'électricité (D. Ducroux).
- etc.

Le programme détaillé peut être obtenu à la FPSE, Uni II, 24 rue Général Dufour 1211 Genève 4 (022/209333)

* * * * *

Les Cours Internationaux Post-Universitaires (C.I.P.U.) auront lieu cet été du 15 au 19 août à l'Université d'Etat à Liège. Ils ont pour thème: "Ordre, Turbulence et Chaos".
Renseignements et inscription auprès de: Rosanne Van Elsuweghe, C.I.P.U., BP 224, 1000 Bruxelles 29. (droit d'inscription: 900 FB auxquels il faut ajouter les repas, logement, excursion).

* * * * *

On nous signale l'existence, en France, de l'association des professeurs de Biologie et Géologie de l'enseignement public (adresse utile: Melle S. Chatelet, 12, rue Beccaria, 75012 Paris). Cette association diffuse de nombreux documents pédagogiques (hématologie, la vie avant la naissance, les gisements de l'eau, etc).

agenda

Séminaire de mathématiques élémentaires, Salle Argand, Institut de géologie, 2e étage,
Les mardis de 16h15 à 17h45: 19 avril, 3, 17, 31 mai, 14 juin

Thème général: Jeu et enjeu des problèmes

Renseignements: André Calame, Ch. de Fresens, 2026 Sauges

Colloque du mardi, Institut de mathématique et d'informatique, Auditoire sud, 2e étage
Les mardis dès 16 h 15:

19 avril: E. Bayer-Flückiger (Genève et CNRS Besançon)
Principe de Hasse pour les systèmes de formes quadratiques
(Illustration du passage local-global en arithmétique)

3 mai : H. Carnal (Berne)
Essais de démonstration de l'axiome des parallèles (élémentaire !)
(Un chapitre d'histoire des mathématiques)

10 mai : J-Cl. Hausmann (Genève)
Systèmes articulés: problèmes anciens et nouveaux (élémentaire !)
(Où l'intelligence artificielle resurgit)

17 mai : S. Ekong (Lyon)
Sur les points singuliers réguliers des équations différentielles linéaires
(Résultats élémentaires récents)

7 juin : G. Christol (Paris VI)
Diagonales de fonctions rationnelles

Renseignements: Alain Robert, Inst. de mathématique et d'informatique, Chantemerle 20
cp 2, 2007 Neuchâtel.

Initiation à la systémie, bâtiment principal, salle D 65
Les mardis et mercredis à 17h15
Colloques: 19, avril, 3, 17, 31 mai, 14 juin
Cours: 20, 26 avril, 4, 10, 18 mai, 1, 7, 15, 21 juin
Renseignements: Eric Schwarz, Université, Av. du 1e Mars 26 (038/ 25 38 51 int 65)

Réunion du groupe LOGO de la SSPCI,
mardi 10 mai 1988, 17h à l'IRDP, 43, Fbg de l'Hôpital, Neuchâtel

La nouvelle revue "Tangente"

Les deux premiers numéros sont sortis et leur contenu ne dément pas l'éditorial de lancement:

Vous connaissez, vous lisez des magazines de cinéma, de jazz, de sport .. Mais vous n'aviez encore jamais vu de magazine de mathématiques. Voici Tangente. Vous allez y découvrir une autre image des mathématiques.

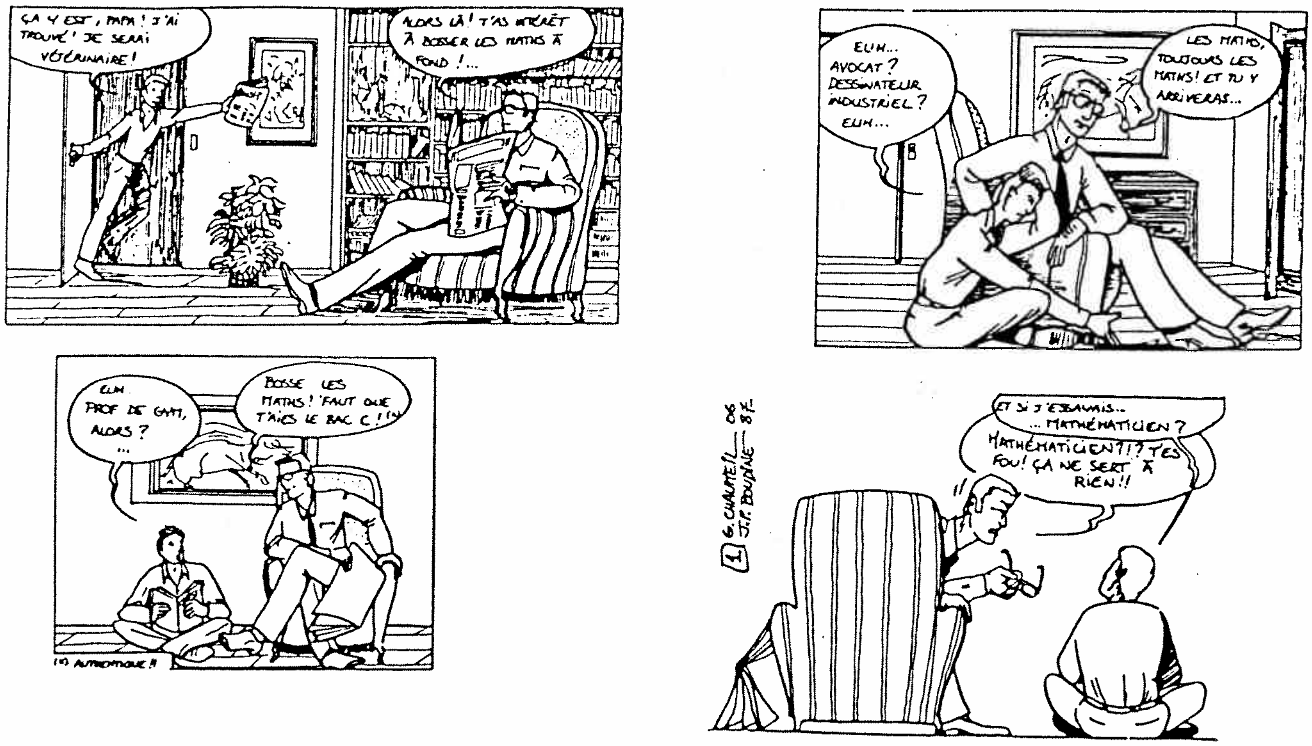
Tangente vous révèlera la place qu'elles occupent dans l'œuvre de nombreux romanciers, poètes, musiciens.
Tangente vous fera pénétrer dans le monde merveilleux du divertissement logique.

Tangente vous montrera que les mathématiques sont extraordinairement vivantes, et qu'elles apportent une contribution décisive aux réalisations techniques les plus récentes.
Mais les lycéens n'oublient pas que le bac fait partie de leur horizon. Ils trouveront dans Tangente des articles spécialement destinés à les y préparer.

Ne dites pas : "je ne comprendrai rien aux articles. " ... Faites l'expérience ! Nos textes seront à la portée de tous, nous ferons tous les efforts nécessaires dans ce but.

Les mathématiques échappent à la pesanteur ! Prenez de la hauteur, prenez la Tangente ! Participez à l'Aventure Mathématique !

Pour s'abonner: Tangente, 76 Bd Magenta, 75010 Paris
(180 FF par an, 6 numéros)



S O M M A I R E , No 1