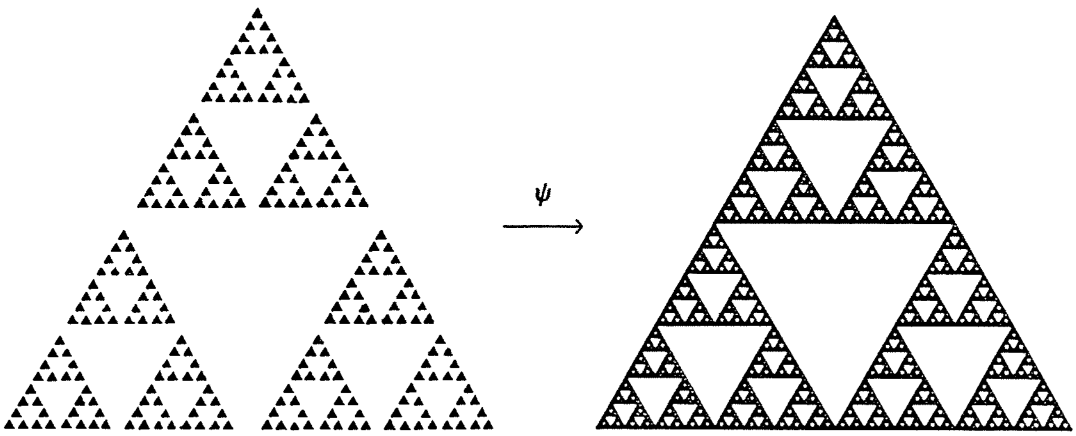
société neuchâteloise des maîtres de mathématique, de physique et de chimie



bulletin no 8, oct. 1990

Une conférence, un livre, une réaction d'élève sont susceptibles d'intéresser d'autres collègues. Pourquoi de pas faire figurer cette information dans le bulletin ?

Edition: Société neuchâteloise des maîtres de mathématique, de physique et de chimie (SNMMPC).

Comité de la SNMMPC: Françoise Jeandroz (présidente), Andrée Boesch, Pierre-André Bolle (caissier), Christian Bazzoni (vice-président, délégué coll. informatique), Christian Berger, Gérard Gast, Jean-Pierre Launaz (secrétaire), Michel Favre (délégué coll. mathématique), Denis Sermet, Eric Vaucher (délégué coll. physique-chimie).

Equipe de rédaction du Bulletin: Jacques-André Calame, Michel Favre, François Jaquet, Françoise Jeandroz, Jacques Méry, Luc-Olivier Pochon.

Ont, en outre, collaboré à ce numéro: Alain Robert, Philippe Chanel.

Contact: Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts-Geneveys

Couverture: Illustration tirée de l'article de Alain Robert.

Délai pour transmettre vos contributions au prochain numéro: 15 janvier 1991

mathématique

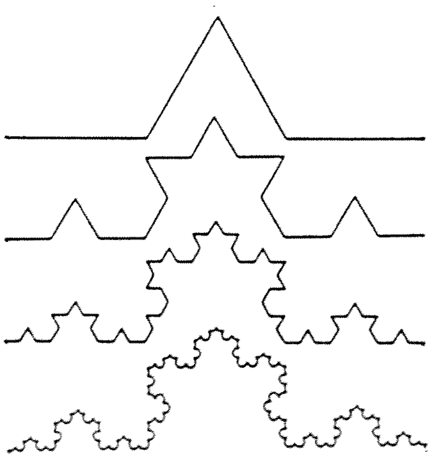
Les courbes de Von Koch et de Sierpinski comme paradigme de fractals (suite)

Alain Robert, Université de Neuchâtel

Le début de cet article se trouve dans le bulletin no 7. Les points traités étaient les suivants:

1. La courbe de von Koch
2. Le flocon de von Koch
3. Le napperon de Sierpinski
4. Les courbes de Sierpinski

L'équipe de rédaction a jugé que les lecteurs apprécieraient mieux la suite du texte d'Alain Robert s'ils disposaient de quelques notions sur les nombres p-adiques. Philippe Chanel, assistant à l'Institut de mathématiques et d'informatiques, a bien voulu écrire une brève introduction sur ces nombres ce dont nous lui sommes reconnaissants. Vous trouverez cette présentation dès la page 6.



5. PARAMETRISATIONS p-ADIQUES

Un entier p-adique est donné par un développement illimité en base p

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots = \sum_{i\geq 0} a_i p^i$$

avec des coefficients ("digits") satisfaisant $0 \leq a_i \leq p-1$. Le développement en base p d'un entier naturel conduit à un tel développement (avec des $a_i = 0$ à partir d'un certain rang). Ces développements peuvent être additionnés avec le système des retenues usuel dans le cas où $a_i + b_i \geq p$. On peut aussi multiplier de tels développements. Avec ces deux lois de composition, on obtient l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$. Dans cet anneau, on trouve les entiers négatifs. Par exemple, si on prend tous les coefficients $a_i = p - 1$, le système des retenues montre que

$$1 \quad + \quad \sum_{i\geq 0} (p-1)p^i = 0.$$

Donc

$$\sum_{i\geq 0} (p-1)p^i = -1.$$

La topologie du produit sur les familles $(a_i)_{i\geq 0}$ munit $\mathbb{Z}_p$ d'une structure d'anneau topologique. Pour cette topologie, $\mathbb{Z}_p$ est compact et totalement discontinu (les seuls connexes de $\mathbb{Z}_p$ sont les points). La numération en base 2 donne un homéomorphisme canonique entre $\mathbb{Z}_2$ et l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0,1]$ (il est donné explicitement plus bas). La figure 19 donne une image canonique de $\mathbb{Z}_3$ au-dessus de l'ensemble de Sierpinski: il y a une application continue canonique $\psi : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S$ qui est bijective hors des points doubles de S. Tous les espaces $\mathbb{Z}_p$ sont homéomorphes (non canoniquement) entre eux et donc à l'ensemble de Cantor C.

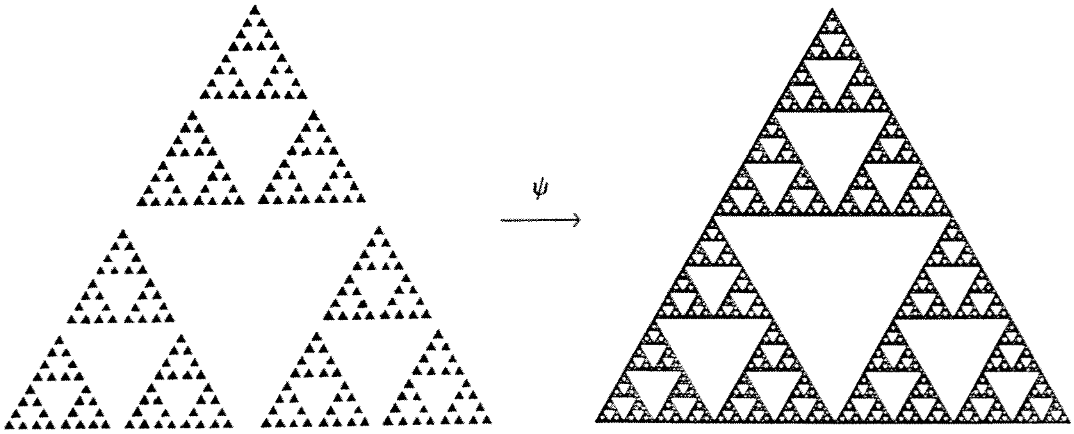


Fig.19

Introduisons les applications surjectives

$$\psi_p : \mathbb{Z}_p \longrightarrow [0,1]$$

définies par
$$\sum_{i\geq 0} a_i p^i \longmapsto \sum_{i\geq 0} a_i p^{-i-1} = 0,a_0a_1a_2\ldots \text{ en base } p.$$

Elles ne sont pas injectives car les points de
$$[0,1[\cap \mathbb{Z}[1/p] = \{a/p^m \text{ où } 0 < a < p^m,\ m \in \mathbb{N}\}$$
ont deux écritures en base p (l'une avec des zéros à partir d'un certain rang, l'autre illimitée). Par contre, en dehors de ces points, ψ_p est bijective. On observera que la composée de $\psi_3 : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow [0,1]$ avec la paramétrisation uniforme de S n'est autre que l'application canonique ψ représentée dans la figure 19
$$\psi : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow [0,1] \longrightarrow S.$$

La symétrie $t \longmapsto -1-t$ de $\mathbb{Z}_3$ correspond à la symétrie de S relativement à son sommet (ce dernier, point fixe de la symétrie, est bien l'image de $t = -1/2$ dont le développement 3-adique a toutes ses composantes a_i égales à 1).

Revenons à l'homéomorphisme canonique entre $\mathbb{Z}_2$ et l'ensemble triadique de Cantor C. Voici comment on peut l'écrire. En utilisant la représentation décimale en base 3 des éléments $x \in [0,1]$, disons
$$x = \sum_{i\geq 0} x_i 3^{-i-1} = 0,x_0x_1x_2\ldots \quad \text{où} \quad x_i = 0,\ 1 \text{ ou } 2,$$
la relation $x \in C$ équivaut à la propriété "$x_i \neq 1$ pout tout $i \geq 0$". Si $t \in \mathbb{Z}_2$ disons $t = \sum_{i\geq 0} t_i 2^i$, on peut lui associer l'élément $x \in C$ ayant toutes ses composantes paires $x_i = 2t_i$ et obtenir ainsi la paramétrisation
$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\simeq} C \subset [0,1]\ ,\quad t = \sum_{i\geq 0} t_i 2^i \longmapsto x = \sum_{i\geq 0} 2t_i 3^{-i-1}.$$
Cette paramétrisation peut être prolongée à l'anneau auquel on ajoute une racine de 1 d'ordre 3
$$\zeta^3 = 1 \quad \text{et} \quad \zeta \neq 1 \qquad \text{d'où} \qquad \zeta^2 + \zeta + 1 = 0.$$
Dans ce nouvel anneau
$$\mathbb{Z}_2[\zeta] = \mathbb{Z}_2 + \zeta\mathbb{Z}_2$$
on calcule avec la règle $\zeta^2 = -\zeta - 1$.

Il y a une paramétrisation canonique de la courbe de von Koch par cet anneau $\mathbb{Z}_2[\zeta]$. Si
$$t + \zeta s = \sum_{i\geq 0} t_i 2^i + \zeta \sum_{i\geq 0} s_i 2^i = \sum_{i\geq 0} (t_i + \zeta s_i) 2^i$$
on lui associe un point $j_4(t + \zeta s) = \sum_{i\geq 0} x_i 4^{-i-1} \in [0,1]$ où
$$t_i + \zeta s_i = 0 \text{ (resp. } \zeta,\ 1+\zeta,\ 1) \implies x_i = 0 \text{ (resp. } 1,\ 2,\ 3).$$
(Cette application j_4 ressemble à une ψ_4, mais ψ_p n'a été définie que pour p premier...) On voit que les points avec $s_i = 0$ ont une image dans un ensemble cantorien obtenu en retranchant de l'intervalle [0,1] un intervalle médian de longueur moitié, etc. En composant cette application avec la paramétrisation uniforme de la courbe de von Koch K on obtient une paramétrisation de cette dernière qui étend la paramétrisation de l'ensemble

de Cantor par $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbb{Z}_2[\zeta] \longrightarrow [0,1] \longrightarrow K.$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_2[\zeta] & \longrightarrow & [0,1] \longrightarrow & K \subset \mathbb{C} \\ \cup & & & \cup \\ \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2[\zeta] \cap \mathbb{Q}_2 & & \longrightarrow & C = K \cap \mathbb{R} \end{array}$$

(on a posé $\mathbb{Q}_2 = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_2)$: c'est le corps des nombres 2-adiques). La connaissance des premières composantes t_0 et s_0 de $t + \zeta s$ détermine sur quel "quart" de courbe l'image sera située. Itérativement, on détermine l'image exacte de $t + \zeta s$ sur la courbe K. A titre d'exercice, le lecteur pourra encore considérer l'application continue $t + \zeta s \longmapsto 2s + \zeta t$ de $\mathbb{Z}_2[\zeta]$ dans lui-même puis déterminer les images des paramétrisations composées

$$t + \zeta s \longmapsto 2s + \zeta t \longmapsto \Phi(2s + \zeta t),$$
$$t + \zeta s \longmapsto 2s + \zeta t \longmapsto 2t + \zeta 2s \longmapsto \Phi(2t + \zeta 2s).$$

Point n'est besoin d'épiloguer plus longtemps sur ces paramétrisations...

6. SYSTEMES ITÉRÉS

Sans prétendre faire une théorie générale, il peut néanmoins être utile de signaler une méthode générale de construction de fractals *self-similaires* dans un espace euclidien $\mathbb{R}^k$. Considérons pour cela un système fini de similitudes $S = (S_1, \dots, S_n)$, chaque S_i étant de la forme

$$S_i = \frac{1}{\nu_i} T_i + a_i$$

où T_i est une isométrie linéaire de $\mathbb{R}^k$, $\nu_i > 1$ (un facteur de contraction) et $a_i \in \mathbb{R}^k$ (translation). Pour toute partie A de $\mathbb{R}^k$, on pose

$$S(A) = \bigcup S_i(A),$$
$$S^{k+1}(A) = S(S^k(A)) \quad (k \geq 1).$$

Le cas le plus simple est celui des deux similitudes S_1 et S_2 de $\mathbb{R}$ données par

$$S_1 = 3^{-1}\ \mathrm{Id.},\ S_2 = 3^{-1}\ \mathrm{Id.} + 2/3.$$

Avec $S = (S_1, S_2)$ on obtient évidemment

$$S([0,1]) = [0,1/3] \cup [2/3,1],$$
$$S^2([0,1]) = S([0,1/3] \cup [2/3,1]) =$$
$$= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1].$$

On reconnaît la construction de l'ensemble de Cantor

$$C = \bigcap_{k\geq 1} S^k([0,1]).$$

De même, trois similitudes dans $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ permettent de construire l'ensemble S de Sierpinski et quatre similitudes la courbe de von Koch. Dans ces exemples, les facteurs de contraction sont égaux à $\nu = 1/3$ pour C, $\nu = 1/2$ pour S et $\nu = 1/4$ pour K. Ce sont les rapports de self-similarité respectifs.

Revenons au cas général et introduisons l'ensemble $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^k)$ des parties compactes non vides de $\mathbb{R}^k$. Pour A et B $\in \mathcal{P}_c$, on pose

$$\delta(A,B) = \underset{a \in A}{\mathrm{Max}}\ (\mathrm{dist}(a,B)).$$

Il est clair que $\delta(A,B) = 0$ exactement lorsque $A \subset B$. Pour obtenir une métrique sur $\mathcal{P}_c$, il s'agit simplement de symétriser la relation δ en posant

$$d(A,B) = \mathrm{Max}(\delta(A,B),\delta(B,A)).$$

C'est la définition de la métrique de Hausdorff sur $\mathcal{P}_c$. Le théorème des applications contractantes dans un espace métrique fournit alors facilement le résultat général suivant.

<u>Théorème</u>. Pour tout système $S = (S_l)_{1 \le l \le n}$ de similitudes dans $\mathbb{R}^k$ ayant des facteurs de contraction $\nu_l > 1$, l'application $S : \mathcal{P}_c \longrightarrow \mathcal{P}_c$ définie ci-dessus est contractante et admet en conséquence un unique point fixe K appelé *attracteur* de S. De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}_c$, $S^k(A) \longrightarrow K$ au sens de la métrique de Hausdorff sur $\mathcal{P}_c$.

Dans le cas d'un système $S = (S_l)_{1 \le l \le n}$ où tous les facteurs de contraction $\nu_l = \nu$ son égaux, la dimension de self-similarité d d'un tel attracteur doit satisfaire $\nu^d = n$, c'est-à-dire $d = \log n / \log \nu$. En général, la dimension de self-similarité d sera définie par

$$\sum_{1 \le l \le n} \nu_l^{-d} = 1.$$

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Les deux références suivantes expliquent le contexte général évoqué dans la dernière section 6. Elles contiennent de plus de nombreuses références.

HUTCHINSON J.E., Fractals and Self Similarity, *Indiana Univ. Math. J. 30 (1981) pp.713-747*

LINSTRØM T., Brownian Motion on Nested Fractals, *Memoir of the AMS (to appear)*

Pour ce qui concerne les images (en couleur) de différents fractals (spécialement celui de Mandelbrot), on ne peut que recommander les deux livres suivants dont les tirages élevés ont permis d'abaisser le prix.

PEITGEN H.-O., RICHTER P.H., The Beauty of Fractals, *Springer-V. (1986) ISBN 3-540-15851-0*

PEITGEN H.-O., SAUPE D., The Science of Fractal Images, *Springer-V. (1988) ISBN 3-540-96608-0*

Introduction aux nombres p-adiques

Philippe Chanel

Le premier ensemble de nombres qui est apparu dans l'histoire des mathématiques est celui des entiers naturels $\mathbb{N}$, que l'on munit d'une addition et d'une multiplication.

Avant d'agrandir cet ensemble pour en faire un anneau $\mathbb{Z}$, puis un corps $\mathbb{Q}$; on va s'intéresser aux développements en base p (un entier quelconque) de ces entiers naturels.

On écrit : $n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \ldots + n_k p^k$ avec $0 \leq n_i < p$
et k tel que $n < p^{k+1}$.

Considérons maintenant l'ensemble de tels développements en base p mais avec une infinité de composantes ("digits") n_i, ensemble que l'on appelle ensemble des entiers p-adiques, noté $\mathbb{Z}_p$.

On le munit d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles sur $\mathbb{N}$; donc en n'oubliant pas les retenues.

Exemple de calcul : prenons $p = 10$.
et pour $1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + \ldots$ on écrira : ...4321.

$$\begin{array}{rr} & \ldots963963 \\ \times & \ldots030303 \\ \hline & \ldots891889 \\ & \ldots1889 \\ + & \ldots89 \\ \hline & \ldots970789 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \ldots21987654321 \\ + & \ldots89123456789 \\ \hline & \ldots11111111110 \end{array}$$

Evidemment de tels calculs demandent un temps infini, mais on remarque que l'on détermine facilement et rapidement les k premiers n_i et cela sans risque d'erreur "d'arrondi" comme dans le cas des nombres réels.

De plus:
$$\begin{array}{rr} & \ldots0000001 \\ + & \ldots9999999 \\ \hline & \ldots0000000 \end{array}$$

Il y a donc des éléments de $\mathbb{Z}_{10}$ qui ont un opposé.

On remarque encore qu'à "-4" correspond ...999996 car :

$$\begin{array}{rr} & \ldots999996 \\ + & \ldots000004 \\ \hline & \ldots000000 \end{array}$$

Et qu'à "$^2/_3$" correspond ...333334 car :

$$\begin{array}{r} \ldots 333334 \\ \underline{\times \ \ldots 000003} \\ \ldots 000002 \end{array}$$

On ne peut pas définir un ordre sur $\mathbb{Z}_{10}$ (par conséquent sur $\mathbb{Z}_p$) qui prolongerait celui de $\mathbb{N}$. En effet, sinon on aurait ...9999 plus grand que ...001, lui même plus grand que ...000 ; ce qui est absurde car leur somme est nulle.
(Dans une relation d'ordre si a>c, b>c alors a+b>c !)

$\boxed{\mathbb{Z}_p \text{ est un anneau commutatif et unitaire}}$

Pour montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau commutatif et unitaire; il suffit d'exhiber un opposé de chaque $a \in \mathbb{Z}_p$.

Soit $a \in \mathbb{Z}_p$ ($a \neq 0$) et $i = v_p(a)$; alors $b \in \mathbb{Z}_p$ défini par :

$$b_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 0,1,\ldots,i-1. \\ p-a_k \text{ si } k = i \\ p-1-a_k \text{ si } k > i \end{cases}$$

est tel que a + b = 0.

Remarques :

- Les entiers naturels sont les entiers p-adiques : $x = \sum_{k \geq 0} n_k p^k$ tels que $n_k = 0 \quad \forall\ k \geq N(x)$.

- Les opposés des entiers naturels sont les entiers p-adiques : $x = \sum_{k \geq 0} n_k\, p^k$ tels que $n_k = p-1 \quad \forall\ k \geq N(x)$.

Donc $\mathbb{Z}$ s'injecte naturellement dans $\mathbb{Z}_p$.

De plus :

Si p = 7, on a :

$$\begin{array}{r} \ldots 666666655 \\ \times \ldots 053053053 \\ \hline \ldots 666666631 \\ \ldots 66666604 \\ \ldots 666631 \\ \ldots 66604 \\ \ldots 631 \\ \ldots 04 \\ \hline \ldots 000000001 \end{array}$$

Si p = 10, on a :

$$\begin{array}{r} \ldots 999991 \\ \times \ldots 111111 \\ \hline \ldots 999991 \\ \ldots 99991 \\ \ldots 9991 \\ \ldots 991 \\ \ldots 91 \\ \ldots 1 \\ \hline \ldots 000001 \end{array}$$

Cela signifie que ...053053 (resp. ...111111) est l'inverse de l'opposé de "9" dans $\mathbb{Z}_7$ (resp. $\mathbb{Z}_{10}$).

Donc ...053053 joue dans $\mathbb{Z}_7$ le même rôle que ...111111 dans $\mathbb{Z}_{10}$ et que $-{}^1/_9$ dans $\mathbb{Q}$.

> Si $x = \sum_{k \geq 0} a_k p^k \in \mathbb{Z}_p$ est tel que $a_0 \neq 0$ et $(a_0,p) = 1$;
> alors x possède un inverse dans $\mathbb{Z}_p$

En effet, si $a_0 \neq 0$ et $(a_0,p) = 1$;

il existe b_0 $(0 < b_0 < p)$ tel que $a_0 \cdot b_0 \equiv 1 \mod p$.

Donc $x \cdot b_0 = 1 + p\,k \quad k \in \mathbb{Z}_p$.

Soit $y = 1 - k\,p - k^2 p^2 - \ldots \in \mathbb{Z}_p$, on a $x \cdot b_0 \cdot y = 1$

et par conséquent : $b_0 \cdot y = x^{-1}$.

Remarques pour le cas où p est premier :

- La condition d'inversibilité ci-dessus, nous dit :
  $x = \sum_{k\geq 0} n_k \, p^k \in \mathbb{Z}_p$ est inversible multiplicativement ssi $a_0 \neq 0$.

- $\mathbb{Z}_p$ est intègre :
  Soient $a,b \in \mathbb{Z}_p$-{0}; $i = v_p(a)$, $j = v_p(b)$. On a : $v_p(a\cdot b) = i+j$ car
  $0 < a_i,b_j < p \Rightarrow a_i\cdot b_j \neq 0 \mod p$ et par conséquent $a\cdot b \neq 0$.

Distance sur $\mathbb{Z}_p$:

On définit la valuation p-adique d'un entier p-adique a, notée $v_p(a)$, comme étant le plus petit entier i tel que $a_i \neq 0$. (On pose $v_p(0) = \infty$).

Comme l'on peut déterminer facilement les premiers "digits" sans risque d'erreur, on va dire que x,y sont proches si leurs premiers "digits" sont égaux.

$$d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} \\ 0 \quad \text{si } x = y \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette distance en est bien une !
Et qu'elle vérifie l'inégalité ultramétrique, c'est à dire :
$d_p(x,z) \leq \text{Max}\{ d_p(x,y),\ d_p(y,z) \}$.

Pour cette distance un développement tronqué :
$\sum_{k=0}^{n-1} n_k \, p^k$ de $x = \sum_{k\geq 0} n_k \, p^k$ est une approximation à p^{-n} de x.

Remarque :

Pour cette distance $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$. En effet, il y a un entier aussi près que l'on veut de $a \in \mathbb{Z}_p$, c'est l'approximation à p^{-n} de a.

<u>Exemple d'anneau non-intègre d'entiers p-adiques, c'est-à-dire avec des diviseurs de zéro:</u>

Pour cela on va construire un $x \in \mathbb{Z}_{10}-\{0,1\}$ tel que $x^2=x$, donc $x(1-x) = 0$.

De tels x sont appelés automorphes.

On en construit un comme suit:

on remarque qu'un nombre automorphe doit obligatoirement se terminer par 0,1,5 ou 6.

S'il se termine par 6 quel doit être son chiffre des dizaines ?

$d6 \times d6 = 6 + 10(12d + 3) + 100d^2$.

On veut : $12d + 3 \equiv d \mod 10$ donc $11d + 3 \equiv 0 \mod 10$

c'est à dire $d = 7$.

Ainsi "digit" par "digit" on construit $x \in \mathbb{Z}_{10}$ tel que $x^2=x$ et x se terminant par 6.

$$x = \dots 787109376.$$

Alors $y = 1-x = \dots 212890625$ est tel que $x \cdot y = 0$.

On remarque en plus que $y^2=y$ et donc que y est le nombre automorphe se terminant par 5. Ceux se terminant par 0 (resp. 1) sont bien évidemment 0 (resp. 1).

jeux math & logique

Concours permanent de jeux mathématiques et logiques

François Jaquet

Il ne faut pas perdre de temps, c'est en février ou mars 1991 que se dérouleront les quarts de finales, régionaux, du prochain championnat de jeux mathématiques et logiques. Les expériences de ces dernières années ont montré tout l'intérêt de ce type d'activité: motivation des élèves, plaisir, renouvellement, ouverture, simulation aux plans pédagogiques et didactiques.

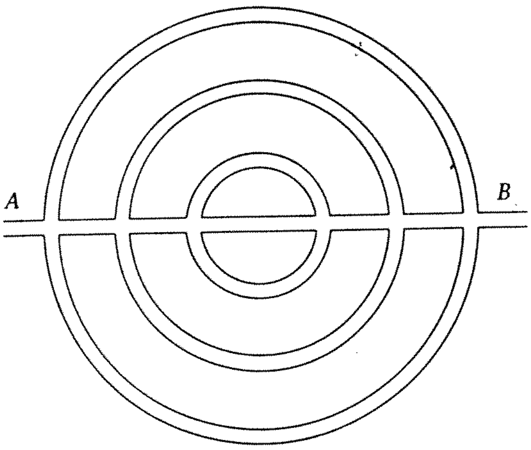
Nous proposont à tous les maîtres d'offrir à leurs élèves, de la façon la moins contraignante qui soit, la possibilité de se "frotter" à ce type d'activité, sous la forme d'un concours permanent, dont les différentes étapes suivront le rythme de publication de notre bulletin. Il suffira de photocopier les pages correspondantes, de les distribuer, de recueillir les réponses, de les transmettre dans les délais sans manquer de les exploiter en classe. Les meilleures solutions seront publiées dans cette rubrique.

Notre première série se compose de problèmes proposés en catégorie C1 (12-13 ans) et C2 (14-15 ans) lors de la 4e finale du championnat international de France, le 7 juillet 1990 à la Cité des sciences de Paris. A titre indicatif, mentionnons que les candidats disposaient de 6 heures pour 12 problèmes, en deux séances. Les calculatrices n'étaient pas autorisées !

Les solutions sont à renvoyer jusqu'au 15 décembre, à François Jaquet, Recorne 21, 2300 La Chaux-de-Fonds.

1 LE FIL D'ARIANE

Ariane se trouve en A, munie d'une bobine de fil. Elle doit se rendre en B, en déroulant son fil derrière elle, de telle sorte que les conditions suivantes soient respectées :
- Chaque couloir du labyrinthe doit être parcouru exactement une fois.
- Ariane peut passer deux fois par le même carrefour, mais le fil ne doit jamais se croiser lui-même.



Dessinez le fil d'Ariane.

2 CROISSEZ ET MULTIPLIEZ

La population de la ville d'Abaq voit sa population s'accroître régulièrement chaque année de 10 %. La ville de Bout-Lié en revanche, voit sa population diminuer régulièrement chaque année de 10%.

Il y a un an la ville d'Abaq avait 6 561 000 habitants. Dans deux ans, les deux villes auront exactement le même nombre d'habitants. combien d'habitants avait la ville de Bout-Lié il y a deux ans ?

3 CARRÉMENT MULTIPLE

De combien de façons différentes peut-on remplir cette grille de "nombres croisés", sachant qu'aucun nombre ne peut commencer par 0 ?

A : multiple de 2
B : multiple de 3
C : multiple de 4
D : multiple de 5

	C	D
A		
B		

4 DEMASQUEZ L'AFFREUX

"L'Affreux" est un criminel très recherché. Il a la particularité de changer d'aspect et de passer ainsi inaperçu. Un jour où il est poursuivi par l'inspecteur Kidédui il se réfugie dans un mini car de douze places assez spécial ! Sur chaque banquette une personne dit la vérité, l'autre ment. Voici les déclarations des 12 passagers du mini-car :

1) le 5 est un menteur	5) je sais qui est l'affreux	9) je ne suis pas l'affreux
2) je suis l'affreux	6) je ne suis pas l'affreux	10) je sais qui est l'affreux

3) je suis l'affreux	7) le 3 dit la vérité	11) le 10 dit la vérité
4) je ne suis pas l'affreux	8) le 2 est un menteur	12) le 5 dit la vérité

A quelle place est situé l'affreux ?

5 NOMBRES CROISÉS

Verticalement
a - Multiple de 6
b - Multiple de 7
c - Multiple de 8
d - Multiple de 9

Horizontalement
1 - Puissance de 5
2 - Puissance de 4
3 - Puissance de 3
4 - Puissance de 2

	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				

Ces énoncés sont repris du Jeune Archimède no 5. Suite en page 3 de couverture.

lu pour vous

Guzman, M. de. **Aventures mathématiques**. Lausanne, 1990. Presses polytechniques et universitaires romandes.

Cet ouvrage propose des problèmes de mathématiques célèbres ou des "amusements" mathématiques. Mais ce n'est pas un livre de divertissement tel qu'il en existe de nombreux autres. Non, le but du livre est de mettre en évidence des stratégies de pensée qui permettent de résoudre des problèmes. Il est intéressant de constater que certaines figures de raisonnement apparaissent aussi bien dans certains théorèmes de mathématiques avancées que dans des situations plus concrètes. Par exemple le principe de Dirichlet qui permet de démontrer la proposition suivante: *pour tout nombre réel r, il existe un nombre rationnel p/q (il en existe même un infinité) tel que:* $|r - p/q| < 1/q^2$.

Ce principe est aussi connu sous le nom de principe du pigeonnier: si 21 pigeons se répartissent dans 20 pigeonniers, vous pouvez assurer qu'un des pigeonniers contient au moins deux pigeons. Elémentaire mon cher Watson. C'est aussi ce principe qui permet de démontrer que il y a au moins 30 suisses qui ont exactement le même nombre de cheveux. Voici d'autres conséquences du principe du pigeonnier:

Il n'y a pas de match nul possible au jeu de Sim (voici succinctement les règles de ce jeu: deux joueurs relient à tour de rôle deux sommets d'un hexagone. Chaque joueur a sa couleur. Le premier joueur qui ferme un triangle de sa couleur a perdu, voir aussi Interface 3/90). Ce résultat est attaché au nom de Ramsey.

Dans la liste des n^2+1 premiers nombres naturels, il y en a toujours au moins $n+1$ d'entre eux qui sont en l'ordre (ascendant ou descendant).

Mais attention aux faux amis: *Un américain désire visiter en Europe 12 villes touristiques desservies par des aéroports dont les distances mutuelles sont toutes différentes. Sur une carte, il joint chaque aéroport à celui des 11 autres qui est le plus proche. Montrer qu'aucun des 12 aéroports n'est ainsi relié à plus de 5 autres (extrait de Mathématique et pédagogie, no 75, février 1990).*

Les étapes de résolution de problèmes proposées par Guzman sont les suivantes:

A. AVANT D'AGIR, ESSAYEZ DE COMPRENDRE

B. A LA RECHERCHE DE STRATÉGIES

B.1 Cherchez des ressemblances avec d'autres jeux et problèmes
B.2 Commencer par ce qui est facile rend facile ce qui est difficile
B.3 Faites des expériences et cherchez des traits communs, des règles
B.4 Faites-vous un schéma et éventuellement... colorez-le
B.5 Modifiez le problème, changez légèrement l'énoncé, pour voir si, ainsi, vous trouvez un autre chemin possible
B.6 Choisissez une bonne notation
B.7 Exploitez la symétrie..., si vous le pouvez
B.8 Supposons que vous ne pouvez pas... où allons-nous?
B.9 Supposons que le problème est résolu
B.10 Pensez à des techniques générales: récurrence, descente de l'infini, procédé diagonal, principe du pigeonnier...

C. MENEZ À TERME VOTRE STRATÉGIE

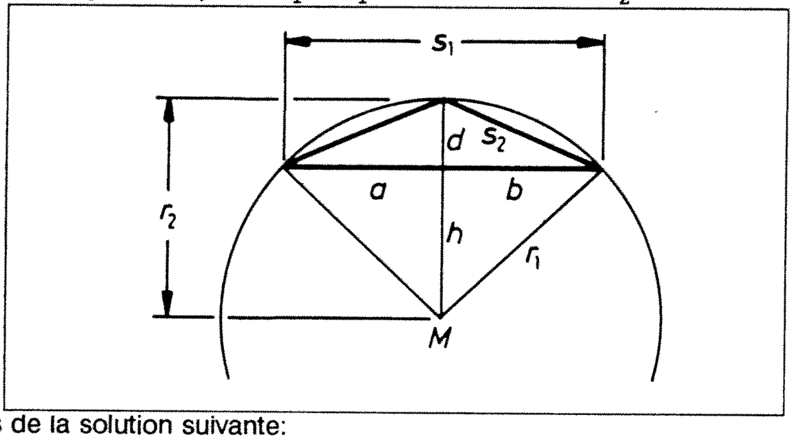
C.1 Menez à terme les meilleures idées que vous avez eues à l'étape B. Une à une. Ne les mélangez pas au début.
C.2 Ne vous découragez pas trop vite. Mais ne vous obstinez pas trop sur une seule idée. Si les choses se compliquent vraiment, il y a probablement une autre voie.
C.3 Cela a marché? Vous en êtes sûr? Analysez bien votre résultat.

D. TIREZ PROFIT DU JEU ET DE VOTRE EXPÉRIENCE

D.1 Analysez bien la voie que vous avez empruntée. Comment êtes-vous arrivé à la solution? Ou alors, pourquoi n'y êtes-vous pas arrivé?
D.2 Essayez de comprendre non seulement la solution, mais aussi le pourquoi de cette solution
D.3 Regardez simplement si vous pouvez le faire plus simplement
D.4 Examinez bien la méthode que vous avez suivie, afin de voir si vous pouvez l'utiliser dans d'autres circonstances
D.5 Réfléchissez un peu à votre manière de raisonner et tirez-en les conséquences pour le futur.

Brach, K. Lösung elementargeometrischer Aufgaben mit Turbo-Prolog. **Praxis der Mathematik**, Heft 5, Oktober 1990.

Considérez cette figure géométrique où r_1 et s_1 sont donnés et où s_2 est recherché.



Que pensez-vous de la solution suivante:

a = b = 1 en divisant s1 par 2
b = 1 puisque b = a
h = 9.94987 côté de b, h, r1
r2 = 10 puisque r2 = r1
d = 0.05012 car d = r2 - h
s2 = 1.0013 hypoténuse de d, b, s2

Cette solution a été obtenue à l'aide du programme ci-dessous. La situation peut paraître relativement complexe dans la mesure où il faut s'habituer au langage Prolog. Toutefois, il n'est pas difficile de comprendre et d'imiter cet exemple particulier. Ce qui paraît remarquable, c'est que l'on a construit une mécanique qui permet d'exhiber une "démonstration". Faut-il classer ce style de travail au rang des "curiosités" ou alors a-t-il des répercussions plus profondes sur les contenus et les méthodes d'enseignement?

Le programme

Tout d'abord on formule des faits connus de notre situation. On comprend sans mal la signification des prédicats:

```
connu(r1,10). (signifie la mesure de r1 est connue, elle vaut 10)
connu(s1,2).

bout_à_bout(h,d,r2). (signifie que h et d mis bout à bout constitue r2)
bout_à_bout(a,b,s1).

isométrique(a,b). (vous avez compris!)
isométrique(r1,r2).

triangle_rectangle(b,h,r1).
triangle_rectangle(d,b,s2).
```

Puis on donne les règles qui "expliquent" ce que l'on entend par trouver un nouvel élément de la solution. *on_a_trouvé(S,X,CH)* se lit: on a trouvé l'élément S de grandeur X sachant que les éléments de CH restent à trouver. Deux règles suffiront pour fixer les idées, elles figurent en page 4 de la couverture.

agenda

Séminaire de mathématiques élémentaires, Salle Argand, Institut de géologie, 2e étage, les mardis de 16h15 à 17h45. 30 octobre, 13 et 27 novembre, 11 décembre 1990, 8 et 22 janvier, 5 et 19 février 1991.

Thème général: **L'aventure des parallèles** (d'après l'ouvrage de J-Cl. Pont)

L'accent se porté sur certains aspects fondamentaux, sur les relations entre la géométrie et l'espace physique et sur les conséquences éventuelles pour l'enseignement de la géométrie..

Renseignements: André Calame, "Les grands champs", 2026 Sauges

* * *

Colloques du mardi, Institut de mathématique et d'informatique, Auditoire nord, 2e étage, les mardis dès 16 h 15.

30 octobre: **A propose de la classification des formes quadratiques**. François Sigrist (Neuchâtel)

6 novembre: **Actions moyennables**. Thierry Giordano (Genève)

16 novembre: **Quelques aspects de géométrie non commutative**. Joachim Cuntz (Heidelberg)

27 novembre: **Invariants des noeuds et groupes quantiques**. Christian Kassel (Strasbourg)

11 décembre: **La dimension des formes quadratiques isotropes**. Jean-Pierre Tignol (Louvain-la-Neuve)

Renseignements: Alain Valette, Institut de mathématique et d'informatique, Chantemerle 20, cp 2, 2007 Neuchâtel.

* * *

Colloques de systémique, le mercredi tous les quinze jours à 17h15, Université, salle D63.

14 novembre: **Modèles linguistiques: système de la langue, usage de la langue, changement linguistique**. Christian Rubattel (Neuchâtel)

28 novembre: **D'où vient l'ordre social?** Jean-Pierre Gern (Neuchâtel)

12 décembre: **Quelques évolutions récentes dans l'analyse des disparités régionales**. Olivier Crevoisier (Neuchâtel)

9 janvier: **Les automates cellulaires comme outil de modélisation des systèmes complexes. Application à des systèmes physiques et biologiques**. Michel Droz (Genève)

23 janvier: **D'où vient l'organisation dans les systèmes vivants**. Jürgen Remane (Neuchâtel)

6 février: **Ordre et désordre en logique**. Denis Miéville (Neuchâtel)

20 février: **Chaos, cosmos: origine de l'ordre selon les mythes des sociétés traditionnelles**. Clairette Karakash (Neuchâtel).

Par ailleurs le cours d'introduction à la pensée et à la pratique systémique a lieu tous les mardis, à 17h15 salle D63. Des Séminaires (Etude de: Autonomie et connaissance de F. Varel, Seuil 1989) auront lieu les mercredi 21 novembre (17h15 salle D63), 19 décembre, 16 janvier 1991, 13 février.

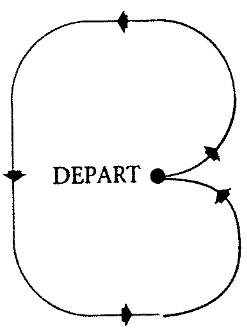
Renseignements: Eric Schwarz, C.I.E.S., Université de Neuchâtel, 26, Av. du 1e mars, 2000 Neuchâtel (25 38 51)

6 LES BOUGIES DE L'ÉMIR

L'émir Hifik a conservé les bougies de ses gâteaux d'anniversaire, depuis son premier anniversaire jusqu'à aujourd'hui, sauf celles d'une année où il était trop malade pour fêter quoi que ce soit. Il possède actuellement exactement 1990 bougies.
Quel âge avait-il lorsqu'il n'a pu fêter son anniversaire ?

7 TÉLÉCOMMANDE

Christophe s'amuse avec sa voiture radiocommandée. Celle-ci roule à vitesse constante, et sur la télécommande, on ne trouve que 3 boutons : marche avant (en ligne droite), virage à gauche, et virage à droite. Lorsqu'on fait tourner la voiture, à droite ou à gauche, celle-ci ne peut effectuer qu'un quart de tour complet de rayon 31.8 cm, ou un multiple d'un quart de tour.
En partant d'un point quelconque, **quelle est la longueur minimum d'un trajet permettant de ramener la voiture à son point de départ, mais orientée dans l'autre sens ?**



Un exemple de trajet possible
On donnera la réponse à un centimètre près.
Prendre 3,14 pour π

8 GENEALOGIQUE

Les années de naissance et de la mort du prince Wu-Tcheou sont formées des mêmes chiffres, dont la somme donne l'âge qu'il avait à sa mort, alors que le produit donne le siècle de celle ci.
En quelle année naquit le prince Wu-Tcheou ?

9 MELANGE DETONNANT

Le jeune Alex Plosion fait un mélange de deux composants dans les proportions suivantes :
7575 mg de dina pour 799 mg de mite.
Il peut faire varier les quantités respectives de ces deux produits, mais moyennant certaines précautions, car si le quotient entier de la masse de dina par la masse de mite change, le mélange devient explosif !
Quel est le plus grand nombre entier de milligrammes qu'il peut simultanément ajouter ou simultanément retrancher à la fois à la masse de dina et à la masse de mite sans provoquer de catastrophe ?

10 JULIA ET ARMAND

Julia achète un paquet de CZUR, une boîte de SMIT et un rouleau de PSEK, le tout pour 4 ECUS.
Son ami Armand del Brot, lui, a acheté pour 5 ECUS de CZUR, 5 ECUS de SMIT et 5 ECUS de PSEK.
Il a acheté plus de rouleaux de PSEK que de boîtes de SMIT, et plus de boîtes de SMIT que de paquets de CZUR
Combien a-t-il acheté d'articles de chaque sorte, sachant que les prix de ces 3 articles sont tous différents.

11 LE CUBE PATRIOTIQUE

Monsieur T.R. Hykub, le travail terminé, rentre chez lui et aspire à un repos bien mérité. Las, à peine assis son fils Paul, un petit génie de dix ans, a encore pris les cubes en bois de sa petite soeur.... et vient le trouver : "Papa, je voudrais les colorier en bleu, blanc, rouge. Je veux que chaque couleur soit au moins une fois sur chaque cube. Chaque face doit être d'une seule couleur, mais on peut utiliser plusieurs fois la même couleur sur un même cube. Tous les cubes doivent être différents. Dis, papa, combien me faut-il de cubes au maximum ?" Monsieur Hykub aimerait bien dire à Paul de rendre les cubes à sa petite soeur......
Répondez pour lui.

Résolution de problème en Prolog, suite de la page 14

La première règle exprime: "on trouve S si S est connu"!

```
on_a_trouvé(S,X,_)    if    connu(S,X),!.
```

La deuxième règle explique: on trouve C de mesure Z sachant que la liste CH d'éléments restent à trouver si:
- C n'est pas un élément de CH (sinon on va tourner en rond !),
- il existe un triangle rectangle A, B, C,
- on trouve les mesures de A et B (en incluant dans cette recherche que C reste à trouver).

En notant X et Y les mesures de A et B, Z est la racine de $X^2 + Y^2$. On procède encore à l'affichage de la règle. Les valeurs de C, Z, A, B, C s'intercalent dans les emplacements notés par %.

```
on_a_trouvé(C,Z,CH)   if    pas_élément(C,CH) and
                            triangle_rectangle(A,B,C) and
                            on_a_trouvé(A,X,[C|CH]) and
                            on_a_trouvé(B,Y,[C|CH]),!,Z=sqrt(X*X+Y*Y) and
                            write("\n\t % = % hypoténuse de %, %, %",C,Z,A,B,C).
```

La recherche de s2 s'effectue en formulant la requête suivante: **mesure(s2,X,[])** (quelle est la mesure de s2).

SOM,MAIRE , No 8

Pour vous abonner au bulletin (10 Frs pour une année) adressez-vous à:

Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts Geneveys (038/ 53 38 81)

Pour demander votre adhésion à la Société neuchâteloise des maîtres de mathématique, de physique et de chimie prenez contact avec la présidente:

Françoise Jeandroz, Les Allées 30, 2300 La Chaux-de-Fonds (039/ 23 09 56)