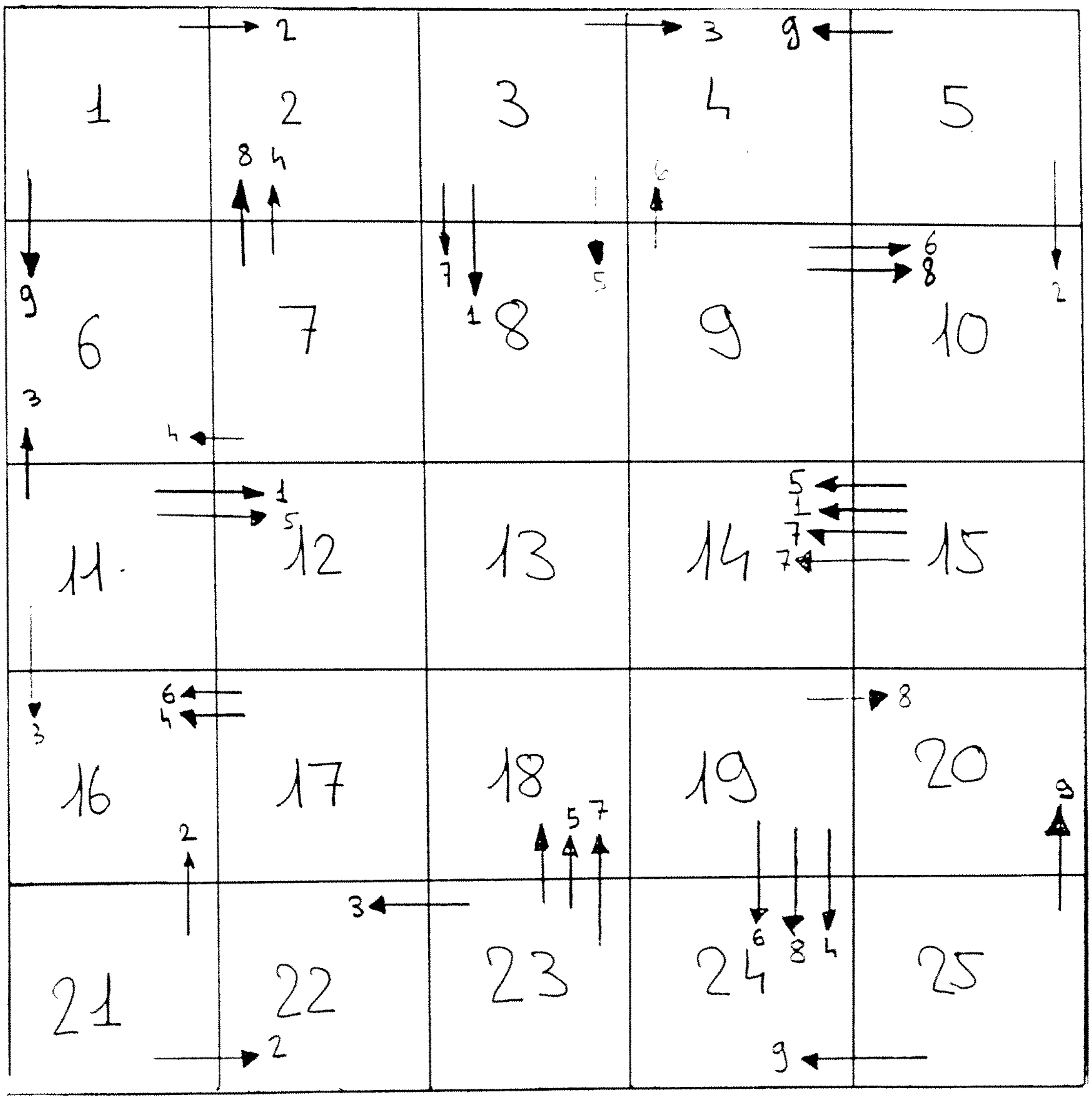
Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences



bulletin n° 12, avril 1992

Une conférence, un livre, une réaction d'élève sont susceptibles d'intéresser d'autres collègues. Pourquoi de pas faire figurer cette information dans le bulletin ?

Edition: Société des enseignants neuchâtelois de sciences (SENS).

Comité de la SENS: Françoise Jeandroz (présidente), Andrée Boesch, Pierre-André Bolle (caissier), Christian Bazzoni (vice-président, délégué coll. informatique), Christian Berger, Gérard Gast, Jean-Pierre Launaz (secrétaire), Michel Favre (délégué coll. mathématique), Denis Sermet, Eric Vaucher (délégué coll. physique-chimie).

Equipe de rédaction du Bulletin: Jacques-André Calame, Michel Favre, François Jaquet, Françoise Jeandroz, Jacques Méry, Luc-Olivier Pochon.

Ont, en outre, collaboré à ce numéro: François Sigrist, François Gentil, Jean-Pierre Launaz, Roland Heubi.

Contact: Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts-Geneveys

Couverture: Illustration tirée de l'article de François Gentil. Les aphorismes qui illustrent ce numéro ont été produits à l'aide du programme Murf 1.1, AVSD, 1985.

Délai pour transmettre vos contributions au prochain numéro: 1 septembre 1992

mathématique

Les codes correcteurs d'erreurs

François Sigrist

SECURITE DE FONCTIONNEMENT DES ORDINATEURS

Imaginons un modèle de voiture dont la seule avarie possible soit une très petite fuite du réservoir à essence. Pour un véhicule constamment en circulation, cette panne n'est pas très grave, et peut même passer inaperçue lors d'un contrôle périodique. Mais si la voiture est à demeure dans son garage, le danger est beaucoup plus grand.

Un ordinateur, ancien comme moderne, est comparable à une entreprise qui possède deux telles voitures. L'une (appelée mémoire vive) est constamment en action, et l'autre (la mémoire morte) est au repos, servant uniquement de réservoir. Une fuite est l'effacement d'une cellule de mémoire. Dans les premiers mastodontes analogiques des années quarante, cela se produisait lorsqu'un relais coupait inexplicablement le courant dans une lampe. Aujourd'hui, dans les semi-conducteurs, l'effacement peut être causé par l'impact d'une particule alpha. Et comme d'infimes traces d'uranium ou de thorium radioactifs sont présentes dans tous les matériaux, les pannes sont, aujourd'hui comme hier, inévitables et de fréquence appréciable. Il est donc impératif de les déceler et de les réparer.

QUELQUES MOTS SUR LES CODES

On appelle code une collection de mots que l'on emploie pour l'enregistrement d'informations de toute nature. Par exemple, le dictionnaire est un code (il y a une petite restriction, il faudrait y inclure toutes les formes conjuguées et les pluriels, car c'est ainsi que nous en utilisons le contenu). Les nombres entiers, écrits dans le système décimal, forment aussi un code, avec comme alphabet les chiffres de 0 à 9. Un télescripteur se sert d'un code dont les mots sont les caractères du clavier (et non les mots qu'il transmet !).

On convient généralement de considérer que tous les mots d'un code ont la même longueur. On parle ainsi d'un code contenant **M** mots de longueur **n**, écrits à l'aide d'un alphabet de **A** lettres. Enfin, un autre paramètre attaché à un code est sa distance **d** : c'est le nombre minimum de lettres qu'il est nécessaire de modifier pour passer d'un mot du code à un autre. Comme on le constatera ci-après, la distance d'un code en mesure les capacités de détection et de correction des erreurs.

- La langue française est un code à distance zéro !! Des mots comme verre, neuf ou but peuvent en effet porter plusieurs sens différents.

- Les nombres entiers, en revanche, forment un code à distance 1, puisque l'écriture décimale est dépourvue d'ambigüité.

- Dès qu'un code a la distance 2, il devient **détecteur d'erreur** : un mot contenant une faute de frappe ne peut plus lui appartenir. L'exemple le plus connu, bien que tombé en désuétude, est la **preuve par neuf**, consistant à adjoindre à un nombre entier un chiffre de contrôle, obtenu en prenant la somme des chiffres de la somme des chiffres ... de la somme des chiffres. Il n'est d'ailleurs pas tout à fait exact que le procédé fournisse un code à distance 2, car les chiffres 0 et 9 sont indistinguables (les partisans de la numération binaire seront heureux d'apprendre que leur version de la preuve par neuf, dite contrôle de parité, a bien la distance 2). Comme on sait, la distance 2 ne permet pas de corriger les erreurs, car celles-ci ne peuvent pas être identifiées correctement.

- A partir de la distance 3, un code devient **correcteur d'erreur** : un mot entaché d'une faute ne peut provenir que d'un seul mot du code. Pour corriger les fautes, il suffit donc de convenablement "feuilleter" le dictionnaire. Ici, nous disposons d'un exemple banal : prenons le code formé des 26 mots AAA, BBB, CCC, ..., ZZZ. La distance est évidemment 3, et chacun saura décrire un procédé de correction automatique des fautes de frappe. Mais qui voudra tripler la taille des machines ?

Dans ce dernier cas, on dit que le code a le taux d'information $\frac{1}{3}$, car l'information est contenue dans le tiers de la longueur des mots (par définition, le taux d'information d'un code est $\frac{\log M}{n \log A}$ avec m, n, et A comme ci-dessus).

Il est souhaitable que les codes aient une grande distance d (pour traiter les erreurs), et un grand taux d'information (pour ne pas gaspiller les ressources,et aussi pour diminuer les risques de panne). Mais ces deux exigences sont clairement antagonistes, et la théorie mathématique des codes peut être résumée comme l'étude des compromis les mieux adaptés à chaque situation.

CODES ET ORDINATEURS.

Qu'elles soient analogiques ou digitales, les machines à calculer fonctionnent électriquement, et ceci explique l'usage des codes dits binaires, utilisant un alphabet à deux lettres : une lampe est allumée ou éteinte, un interrupteur est ouvert ou fermé, etc ... Un code binaire sera dit (n,M,d) s'il a la distance d, et contient M mots de longueur n.

Dans les premières machines analogiques, les chiffres de 0 à 9 étaient enregistrés sur des rampes de 5 lampes, dont 2 étaient allumées et 3 éteintes :

1 : OOØØØ	**2** : OØOØØ	**3** : ØOOØØ	**4** : OØØOØ	**5** : ØOØOØ
6 : ØØOOØ	**7** : OØØØO	**8** : ØOØØO	**9** : ØØOØO	**0** : ØØØOO

Il est facile de vérifier que ces mots forment un code (5,10,2). La détection des erreurs (rendue possible par la distance 2) est ici facile à réaliser : on mesure simplement la consommation électrique de chaque mot ! Par contre, la correction automatique n'est pas possible. A chaque erreur, il faut donc arrêter la machine, et recharger les données de départ.

Aux dires des témoins de l'époque, les arrêts étaient plutôt fréquents : il fallait parfois plusieurs tentatives avant qu'un programme passe sans interruption. Il devenait dès lors évident qu'en l'absence d'un système de réparation automatique des pannes, le développement de plus grosses machines allait être irrémédiablement compromis.

Le déclic salvateur se produisit dans la période 1948-1949, à plusieurs endroits à la fois probablement. Comme, à cette époque, la moindre découverte, fût-elle mathématique, risquait d'être classée secret militaire, ou alors d'être brevetée, il est difficile d'écrire l'histoire de la théorie des codes à ses débuts. Nous laisserons de côté toute question de priorité en parlant ci-après des deux protagonistes les plus célèbres.

RICHARD HAMMING.

Mathématicien à la Bell Telephone Company, Hamming était de ceux qui attendaient le samedi pour pouvoir enfin calculer tranquillement avec l'ordinateur. Malheureusement, la machine s'arrêtait jusqu'au lundi à la moindre panne, car elle était mise en pilotage automatique pour le week-end.

Irrité par cette situation, Hamming s'attela à la tâche de trouver un code à **distance 3**, ayant néanmoins un taux d'information acceptable. Après nombre d'essais et de tâtonnements, il découvrit un code (7,16,3), remarquable à plusieurs titres. Tout d'abord, son taux d'information est $\frac{4}{7}$ = 0,57.. , à peine moins que $(\frac{\log 10}{5 \log 2})$= 0,66... pour le code (5,10,2) alors en vigueur. Ensuite, le code est linéaire, et cette propriété rend son implantation très facile. Mais c'est dans le procédé effectif de correction des erreurs, étonnamment subtil et cependant très simple, que réside une grande part du mérite de cette remarquable découverte. A posteriori, l'explication mathématique en est pourtant tout à fait élémentaire.

En adjoignant à ce code un contrôle de parité, on obtient un code (8,16,4), avec un taux d'information de 0,5. La vertu de la distance 4 est alors de détecter la présence de 2 erreurs dans un même mot de 8 lettres (mais sans pouvoir les corriger).

A ce stade, il vaut la peine de se livrer au calcul des risques de panne. Pour une cellule de mémoire, les expériences indiquent que l'événement "particule alpha" se produit une fois par million d'années en moyenne. Si l'on utilisait dans un micro-ordinateur actuel le code détecteur d'erreurs (5,10,2) d'autrefois, cela ne lui donnerait qu'une autonomie approximative de six semaines. Autant dire que les machines ne seraient pas ce qu'elles sont maintenant. Avec le code de Hamming (8,16,4), il ne faut arrêter une machine que lorsque **deux** erreurs se sont produites dans le même mot. Le calcul montre qu'il faut pour cela attendre plusieurs années, même avec un gros ordinateur. Il y a donc largement le temps de procéder préalablement, grâce au code, à une correction systématique des erreurs. Cette opération de routine est aujourd'hui courante.

La raison mathématique de ce changement si impressionnant d'ordre de grandeur est connue sous le nom de "paradoxe des anniversaires" : il faut en moyenne interroger successivement 25 personnes jusqu'à ce que l'on arrive à une coïncidence d'anniversaires. Par le même calcul, on constate que l'on peut attendre entre 600 et 1000 particules alpha jusqu'à ce que deux d'entre elles frappent le même mot, et cela explique cette remarquable sécurité.

MARCEL GOLAY.

Le deuxième acteur principal de cette pièce est un ingénieur neuchâtelois, qui travaillait aux Etats-Unis comme spécialiste du radar. En 1949, il découvrit un extraordinaire code correcteur d'erreurs dont les paramètres sont (23,4096,7) ou (24,4096,8) si l'on ajoute le contrôle de parité. Les mots sont trois fois plus longs que dans le code de Hamming, mais le code est en mesure de corriger trois erreurs par mot, et d'en détecter quatre. Il n'est donc pas surprenant que, bien plus tard, on ait pu démontrer que pour la performance théorique des codes, il ne détient pas seulement le record du monde, mais le record absolu.

Au même degré que les transistors qui allaient faire leur apparition un peu plus tard, ce code a révolutionné l'électronique et les télécommunications. Les toutes récentes photos de Jupiter, de Saturne et de leurs satellites, transmises par les sondes Voyager, l'ont été à l'aide du code de Golay. Ce n'est que pour Uranus, qui se trouve à une énorme distance de la Terre, que l'on a dû ralentir la transmission en utilisant des codes à capacité de correction encore plus grande.

Cette découverte constitue le point de départ de la théorie mathématique des codes, une discipline aujourd'hui importante. Le code de Golay y joue d'ailleurs un rôle assez paradoxal. D'une part, il représente un phénomène isolé. On a découvert qu'il contient une configuration combinatoire appelée système de Steiner (5,8,24), connue depuis le siècle passé, qui explique bien son caractère exceptionnel. Mais d'autre part, presque tous les codes (il y en a beaucoup) qui sont apparus depuis 1949 sont peu ou prou ses cousins ou ses descendants.

Quelles que soient leurs propriétés spécifiques, tous les codes illustrent cette maxime devenue universelle, au moins dans le domaine : **il vaut beaucoup mieux tolérer des fautes puis les corriger, que de s'évertuer à les éviter !**

L'illustration la plus typique de l'extraordinaire puissance de ce principe est fournie par le procédé d'enregistrement des disques compacts. Ceux-ci sont chargés à la limite de la saturation, au détriment même de la fiabilité de la lecture. Mais cela permet d'augmenter considérablement la rapidité du décodage, ainsi que la capacité de correction des erreurs. Le lecteur CD fait ainsi beaucoup de fautes, mais celles-ci sont **toutes** corrigées **à mesure** : c'est donc finalement le "paradoxe des anniversaires" qui explique l'exceptionnelle qualité de la reproduction sonore.

RETOMBEES MATHEMATIQUES.

Il y a une dizaine d'années que le "théorème énorme" des mathématiciens a été finalement complètement démontré. Il s'agit de la classification des groupes finis simples. Aux groupes classiques (comme par exemple les groupes de permutations paires), on sait maintenant qu'il faut adjoindre exactement 26 groupes appelés sporadiques. Ces derniers ont tout d'abord dû être exhibés, puis il a fallu montrer que la liste était complète. Fruit d'un gigantesque travail collectif, la démonstration tient actuellement en une dizaine de milliers de pages, et on estime qu'aucun spécialiste n'est aujourd'hui à même de la maîtriser seul.

C'est le code de Golay qui a permis l'exhibition effective des groupes sporadiques manquants, par le biais de la théorie des empilements de sphères en dimension 24 . . . Un extraordinaire cheminement, une étonnante illustration de l'imprévisibilité de la recherche mathématique, et une leçon : l'article de Marcel Golay, qui occupe une petite demi-page dans la revue "Proceedings of the Institute of Radio Engineers", n'a probablement éveillé réellement la curiosité des mathématiciens que quinze ans après sa parution.

François Sigrist
Université de Neuchâtel
Institut de mathématiques et d'informatique

Peer's Law: The solution to a problem changes the nature of the problem.

Rule of Defactualization: Information deteriorates upward through bureaucracies.

Les aphorismes qui illustrent ce numéro ont été produits à l'aide du programme Murf 1.1, AVSD, 1985.

physique pratique

Physique, calcul professionnel et informatique

Deux enseignants et trois apprentis du CPLN,
Jean-Pierre Launaz, Luc-Olivier Pochon, Yann Enggist, Christophe Loeffel, Cédric Zaugg

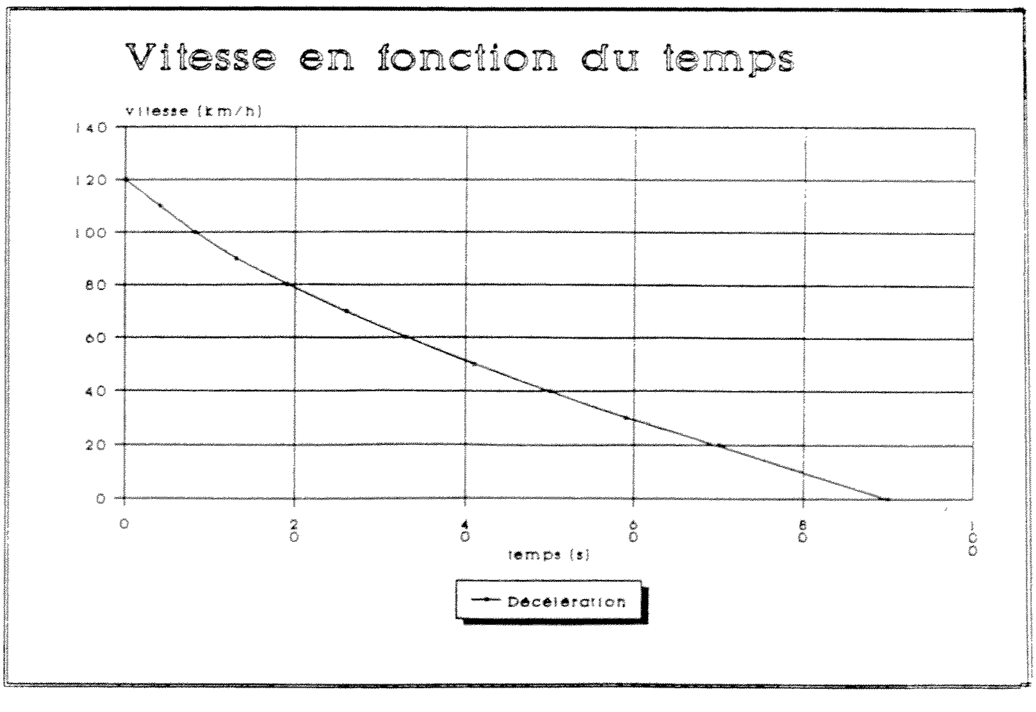
Le but de cette brève présentation est de relater un travail réalisé par des élèves qui suivent les cours facultatifs (physique, mathématique, anglais) de l'Ecole technique du CPLN. Ce travail met en relation trois branches différentes : calcul professionnel (mécanique automobile), physique et informatique.

Le point de départ

Il est fourni par un exercice de physique expérimentale :

Choisissez une route de campagne droite et horizontale. Invitez aussi un(e) copilote. Donnez une vitesse initiale à votre voiture, puis débrayez. Dès cet instant, relevez la vitesse en fonction du temps. Recommencez éventuellement avec d'autres vitesses initiales.
Représentez les résultats par un graphique et interprétez ce dernier. Essayez de tirer des renseignements concernant les frottements.

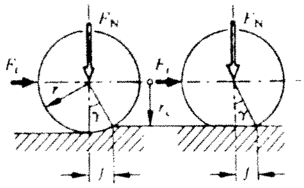
La partie pratique s'est réalisée en Golf GTI. La voiture est lancée à 120 km/h. Dès que la vitesse est stabilisée, le moteur est débrayé, le chronographe est mis en marche. Le conducteur annonce par des tops le passage à 110 km/h, 100 km/h, etc... Le (ou la, l'histoire ne le dit pas) copilote enregistre les temps de passage dans un compteur. Ce qui permet d'établir le graphe:



Une première observation : la décélération n'est pas constante, mais elle se stabilise pour les petites vitesses. Entre 20 et 0 km/h elle vaut : a = dv/dt = (20/3,6)/20 = 0,2778

On connaît la masse de l'auto : m_{golf} = 1200 kg ce qui permet de calculer la force de résistance au roulement : F_r = m_{golf} * a = 333,3 N.

Une autre donnée, le diamètre de la roue sous charge est encore disponible d = 490 mm. Ce qui permet de calculer expérimentalement les coefficients f et μ' donnés par des formulaires.



Résistance au roulement F_r des pneus

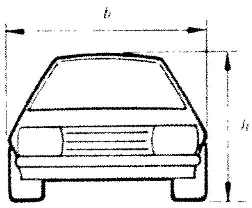
On a l'équilibre
$F_r \cdot r_c = F_N \cdot f$

$$\boxed{F_r = F_N \frac{f}{r_c} = F_N \cdot \mu'}$$

avec $\mu' = \tan\gamma = \frac{f}{r_c}$

F_r	[N]	résistance au roulement
F_N	[N]	charge, normale au plan
r_c	[mm]	rayon sous charge du pneu
f	[mm]	bras de levier de la résistance au roulement (voir tables p. 21)
μ'		coefficient de résistance au roulement (voir tables p. 21)

Le pas suivant a été réalisé en classe de mathématique-informatique où les élèves ont proposé de dessiner la courbe théorique correspondant à celle de leur expérience avec un logiciel standard à disposition : FrameWork. La difficulté est de trouver la notion à partir de laquelle tous les paramètres pourront être calculés. Une proposition est l'accélération qui est mise sous la forme : -k1 - k2*v². Le premier terme représente la composante due à la résistance au roulement. Le deuxième est celle due à la résistance de l'air. Cette information est tirée d'un formulaire:



Aire A du maître couple

Résistance de l'air F_a

$$\boxed{F_a = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \varrho \cdot A \cdot v^2}$$

avec $A \approx 0{,}9h \cdot b$

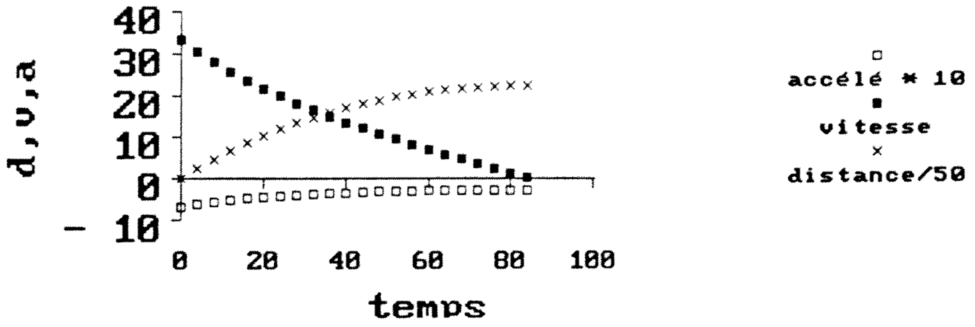
F_a	[N]	résistance de l'air
ϱ	[kg/m³]	masse volumique de l'air ϱ = 1,161 kg/m³ à 15°C et 720 mmHg (voir d'autres valeurs p. 22)
A	[m²]	aire de la section maximale du corps mobile, projection du corps sur un plan ⊥ aux filets d'air (maître-couple)
v	[m/s]	vitesse relative air-corps
C_x		coefficient de traînée (voir table p. 23)

Remarque 1 : F_a est négligeable en-dessous de 20 km/h.
Remarque 2 : ϱ air, varie avec la pression, la température et l'humidité.
Remarque 3 : C_x dépend de la forme et de la rugosité du corps mobile.

Un programme est réalisé dont le but est de remplir les cases d'une feuille de calcul (simul) et les constantes k1, k2 sont ajustées par divers essais. Par la suite elles seront établies à partir des données expérimentales. Notons que l'on aurait pu utiliser directement les constantes de base: μ' et C_x ou les déterminer à travers la simulation. Ce travail n'a pas été effectué, faute de temps.

temps	accélé * 10	vitesse	distance/50
0	-6,99	33,33	0
4	-6,31	30,54	2,44
8	-5,75	28,01	4,68
12	-5,28	25,71	6,74
etc...			

A partir de ces données un graphique est établi automatiquement.



Le résultat est frustre, mais il s'avère suffisant pour étudier l'effet des paramètres k1 et k2 et de les ajuster. Il marque tout de même une victoire parce qu'une telle activité n'est pas évidente. Chaque branche à son approche : utilisation de tables pour le calcul professionnel, calcul de valeurs à partir de la théorie et de résultats d'expérience en physique, reconstruction de données dans la simulation informatique. C'est chaque fois le même problème, la même théorie. Mais les tâches à effectuer diffèrent. D'un cas à l'autre, le changement de point de vue est important. Un objet mobile (lutin) aurait pu fournir un échelon intermédiaire entre l'expérience et la description informatique à l'aide d'un formalisme mathématique moins élaboré.

Notons finalement que, à travers ces activités, les élèves se révèlent de précieux vecteurs de l'interdisciplinarité en colportant des exercices d'une branche à l'autre, en tenant à jour la documentation relative à un problème et en obligeant les maîtres à se pencher sur d'autres approches, d'autres manuels, d'autres manières de faire, d'autres notations.

```
@local(v_init,temps,dt,distance,vitesse,accélération,k1,k2),

dt:= 4.0,                    ; secondes
v_init := 120,               ; km/h

accélération := 0,           ; m/s^2
vitesse := v_init/3.6,       ; m/s
distance := 0,               ; m
temps := 0,                  ; secondes

k1 := 0.2778,
k2 := 0.000379,

@while(vitesse > 0,
            @put(a2:a50,temps),   ; enregistrer le temps
            @next(a2:a50),        ; passer à la case suivante
            temps:=temps+dt,      ; nouveau temps

            accélération := -k1-k2*vitesse^2,
            @put(b2:b50,10*accélération),
            @next(b2:b50),

            @put(c2:c50,vitesse),
            @next(c2:c50),
            vitesse := vitesse + accélération * dt,

            @put(d2:d50,distance/50),
            @next(d2:d50),
            distance := distance + vitesse * dt)
```

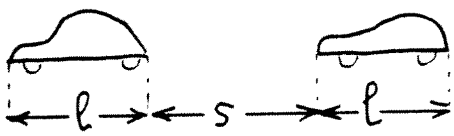
Problème de débit

Roland Heubi, EICN

Le problème est de trouver la vitesse (v) optimale d'une file de voiture pour assurer un débit maximum. Pouvez-vous en donner une estimation avant de vous plonger avec délice dans la démonstration qui suit ?

Les hypothèses :

1) La distance de poursuite entre voitures est suffisante pour que la voiture puisse s'arrêter (en mouvement uniformément décéléré) sans toucher la voiture précédente.
2) Le temps de réaction des conducteurs est de $Tr = 0{,}5$ s
3) La longueur d'une voiture est $l = 5$m
4) Le coefficient de frottement est $\mu = 1$ (chaussée sèche)



Solution :

Débit de voiture : $Q = N/t = v/(s+l)$ avec pour s, distance de freinage : $s = vTr + v^2/(2a)$ et $a = F/m = \mu g$ (décélération).

Donc $Q = v/(l + vTr + v^2/(2\mu g))$

D'où $dQ/dv = (l - v^2/(2\mu g)) / (\ldots)^2$

$dQ/dv = 0 \Rightarrow v_{opt} = \sqrt{2\mu g l}$

A noter que le résultat est indépendant du temps de réaction des conducteurs. Une application numérique à méditer : $v_{opt} = 10$ m/s = 36 km/h.

Meyer's law: It is a simple task to make things complex, but a complex task to make them simple.

Hawkin's Theory: Progess consists in replacing a theory that is wrong with one more subtly wrong.

atelier mathématique

Jeux et Stratégies

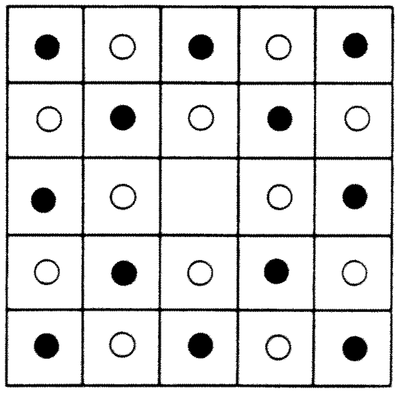
François Gentil, ESRN

Voici quelques extraits de travaux d'élèves en mathématique sur le thème "Jeux et Stratégie", de 9e.

Ces extraits sont simplement photocopiés. Tout commentaire semble superflu. Ces travaux parlent d'eux-mêmes. Ils montrent le niveau qu'une classe peut atteindre.

Jeux des pions (Solution de Anne et Gilles)

Matériel : Une grille "5 x 5", 12 pions blancs et 12 pions noirs, disposés ainsi :



But : Coincer l'adversaire.

Règles du jeu :

1) A tour de rôle, les joueurs déplacent, horizontalement ou verticalement, l'un des pions de leur couleur vers la case libre.

2) Le joueur qui ne peut plus se déplacer a perdu.

a) Le jeu est-il équitable, ou favorise-t-il l'un des joueurs ?

b) Si la case vide, au départ, était située dans un angle plutôt qu'au centre de la grille, cela changerait-il l'issue du jeu ?

Le jeu est inéquitable : le premier qui joue perd. Sur la page suivante, il y a 4 des 8 possibilités de gagner à ce jeu.

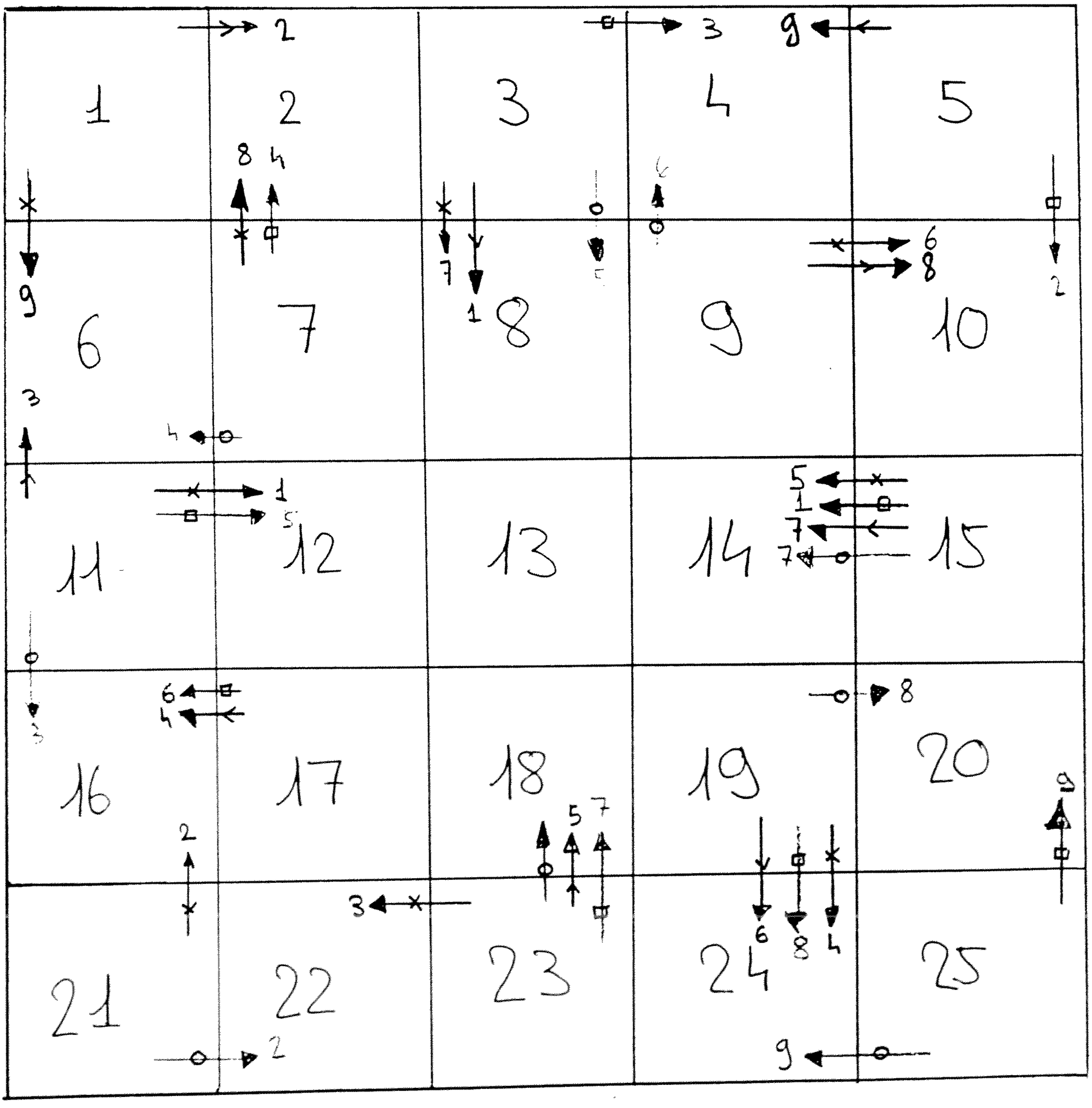
Exemple:

Joueur A :	12-13	
Joueur B :	11-12	
Joueur A :	16-11	Ici le pion A deux possibités de jouer. Soit 16-11, soit 6-11. Ce sera son unique choix dans la partie car après il ne pourra jouer que d'une seul façon s'il ne veut pas perdre tout-de-suite.
Joueur B :	21-16	
Joueur A :	22-21	Il n'a pas d'autres choix.
Joueur B :	23-22	
Joueur A :	24-23	S'il joue 18-23, il perd car 17-18.
Joueur B :	19-24	
Joueur A :	14-19	S'il joue 20-19 ou 18-19, il perd car 25-20 / 17-18
Joueur B :	15-14	
Joueur A :	10-15	S'il joue 20-15, il perd car 25-20
Joueur B :	9-10	
Joueur A :	8-9	S'il joue 4-9, il perd car 5-4
Joueur B :	3-8	
Joueur A :	2-3	S'il joue 4-3, il perd car 5-4
Joueur B :	7-2	
Joueur A :	6-7	Il n'a pas d'autres choix
Joueur B :	1-6	Gagné !!!

Ci-dessous se trouve quatre des huit possibilités pour gagner à ce jeu. Ces solutions sont pareilles à l'exemple de la page précédente mis à part qu'elles sont dans un autre sens. Le principe est donc le-même.

Les flèches de couleurs représentent le trajet que doit faire B pour gagner. Pour cela, il faut avancer le pion en regardant s'il s'agit du bon numéro.

Exemple: A avance son pion depuis 11 jusqu'à 12. Alors, il faudra jouer avec les flèches de couleurs brunes et non pas avec les oranges car ce n'est pas le numéro 1 qui est inscrit.



o rose × brun ◻ orange > violet

Mange diviseurs (Solution de Aude et Nadia)

Matériel : Papier, 2 crayons de couleurs différentes.

But du jeu : Obtenir le score le plus élevé possible en recherchant les diviseurs de nombres naturels.

Règles :

1) On écrit une liste de nombres naturels consécutifs commençant par 2.

2) Le premier joueur entoure de sa couleur un nombre naturel de son choix.

3) Le second joueur, puis chaque joueur à tour de rôle :
   - entoure de sa couleur tous les diviseurs non encore entourés (s'il en trouve) du dernier nombre choisi par l'adversaire,
   - entoure un nouveau nombre de son choix.

   (Lorsque ce dernier est entouré, le joueur n'a plus le droit de revenir sur des nombres éventuellement oubliés.)

4) La partie se termine lorsque tous les nombres sont entourés.

5) Le score de chaque joueur est la somme de tous les nombres qu'il a entourés de sa couleur. Le gagnant est celui qui a le score le plus élevé.

Exemple : On joue sur les nombres naturels de 2 à 10

- A entoure 7	2	3	4	5	6	7	8	9	10
- B entoure 10	2	3	4	5	6	7	8	9	$\boxed{10}$
- A entoure 5 et 2, puis 8	2	3	4	5	6	7	8	9	$\boxed{10}$
- B entoure 4, puis 9	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$
- A entoure 3, puis 6	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$

A a un score de 31, B un score de 23. A est donc gagnant.

Joue plusieurs fois avec un camarade, en fixant toi-même la liste de nombres naturels au départ. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

<u>le joueur 1 est avantagé</u> :

- Pour commencer, le joueur 1 prend le plus grand NB premier possible, le 2ème joueur prendra sûrement le suivant alors le 1er joueur reprend le suivant ...
- A un moment donné, le joueur 2 prendra le dernier NB premier n'ayant pas de multiple dans le jeu ⇒ le joueur 1 prend un nombre élevé qui n'a qu'au maximum 2 diviseurs (ex : 22 quand le jeu va jusqu'à 23, 35 quand il va jusqu'à 43).
- Le joueur 2 prendra les 2 diviseurs puis sera maintenant obligé de prendre soit des chiffres ayant "beaucoup" de diviseurs (que le joueur 1 pourra prendre) soit des "petits" chiffres dont le joueur 1 prendra ses plus grands multiples

Evans' and Bjorn's Law: No matter what goes wrong, there is always somebody who knew it would.

agenda

Séminaire de mathématiques élémentaires, Institut de mathématiques et d'informatique, Chantemerle 20, salle de travaux, 3e étage nord, les mardis de 16h15 à 17h45 aux dates suivantes: 4 et 18 février,

21 avril : Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper (Sergio Longobardi)

5 mai :	Euler et quelques problèmes de théorie des nombres (Yvan Jeanneret)
19 mai :	Des nombres amiables (André Calame)
2 juin :	Le théorème fondamental de l'algèbre (Hela Bettaieb)
16 juin :	Euler et les nombres complexes (Cédric Fleury)

Renseignements : André Calame, Chargé de cours, "Les grands champs", 2026 Sauges

* * *

Colloques du mardi, Institut de mathématique et d'informatique, Auditoire nord, 2e étage, les mardis dès 16 h 15.

28 avril :	Sur la stabilité et la consistance pour l'approximation de problèmes non linéaires (J. Rappaz, EPFL)
5 mai :	Le problème de 3x+1 (S. Eliahou, Genève) (Etude de la fameuse suite donnée par itération de la fonction $f(x) = x/2$ si x est pair, $3x+1$ sinon)
19 mai :	Marches aléatoires et mouvement brownien sur les espaces symétriques (M. Babillot, Paris 6)
2 juin :	Polygones du plan et pavages hyperboliques (C. Bavard, E.N.S, Lyon)
9 juin :	Série de Fourier de polygones (A. Robert, Neuchâtel)

Renseignements : Alain Valette, Institut de mathématique et d'informatique, Chantemerle 20, cp 2, 2007 Neuchâtel.

* * *

Introduction à la pensée et à l'action systémique

Le cours d'introduction à la pensée et à la pratique systémique a lieu tous les jeudis à l'Université, Av. du 1e Mars 26, 12h15 salle D63.

Les colloques ont lieu le mercredi tous les quinze jours à 17h15, salle D63

29 avril :	Aspects systémiques de la confiance en soi. Quelques explorations en programmation neuro-linguistique (N. Martin, Université de Neuchâtel)
13 mai :	De l'auto-organisation à la pédagogie. Quelques réfléxions sur l'autonomie de la connaissance (T. Sandoz, Université de Lausanne)
3 juin :	La représentation des systèmes: du myth au mathème (A. Giré, INSA, Lyon)
10 juin :	Some Difficulties of Holistic Thinking from a Critical Systems Perspective (W. Ulrich, Berne)

Des séminaires ont lieu certains mercredis à 17h15, salle D63. Prochaines séances : 6, 20 mai, 17 juin.

Renseignements : Eric Schwarz, CIES, Université de Neuchâtel, 26, av. du 1er Mars, Tél. 038 25 38 51, fax : 038 25 18 32

Law of the Search: The first place to look for something is the last place you'd expect to find it.

jeux math & logique

Exposition-atelier "Jeu et mathématique"

François Jaquet

L'exposition-atelier itinérante *Jeu et Mathématique* qui a passé dernièrement dans plusieurs écoles de notre canton, proposait quelques bons problèmes, issus des récents championnats de la FFJM.

Pourquoi ces problèmes sont-ils qualifiés de "bons"? Pourquoi les réalisateurs de l'exposition les ont-ils choisis?

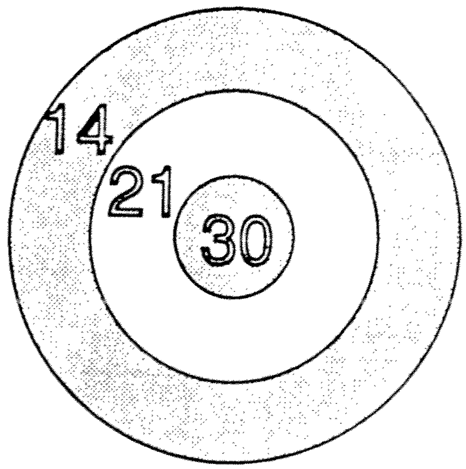
On a beaucoup écrit sur les problèmes et leur résolution. Nous nous contenterons d'en donner ici une définition très pragmatique et intuitive: il y a problème quand celui qui est confronté à une situation (élève ou adulte) ne trouve pas de solution immédiate. Le problème est intéressant, d'un point de vue didactique, quand l'apprenant peut se l'approprier, y engager ses savoirs et ses compétences, reconstruire ou approfondir certaines de ses connaissances, essayer, conjecturer, pour trouver le chemin lui permettant de relier les données de départ au but qu'il pressent et qu'il a envie d'atteindre.

On le voit, les exigences à remplir sont nombreuses pour que le problème soit reconnu d'intérêt didactique. Mais on peut aussi partir de la pratique et de l'observation: si les élèves (et les maîtres) s'accrochent, se passionnent, se défient et ont vraiment envie de trouver cette solution qui leur résiste, la probabilité est forte de trouver un bon problème derrière cette activité intense.

C'est, semble-t-il, le cas pour les deux exemples suivants, vu l'intérêt des élèves et le nombre de questions posées à leur propos par les visiteurs actifs de notre exposition-atelier:

La cible

Vous lancez des fléchettes sur cette cible et vous additionnez les points. Essayez! Vous ne pourrez jamais totaliser 20 points ou encore 33 points.



Quel est le plus grand de ces totaux impossibles à atteindre?

Vous disposez d'un nombre illimité de fléchettes.

Les commentaires méthodologiques qui accompagnent l'exposition suggèrent aux animateurs de faire réfléchir les élèves sur les cas simples (2, 3, 4... subdivisions). C'est en effet une des stratégies les plus évidentes, celle qui doit même aller au-delà de la demande et permettre d'accéder à la généralisation du problème, pour n subdivisions.

Le dénombrement sur chacune des figures données, pour lesquelles n = 10, est aussi une stratégie intéressante:

Pour les triangles il est avantageux de distinguer deux catégories:
- ceux qui ont un sommet en A et en B, (ou un côté AB)
- les autres,de sommet A ou (exclusif) de sommet B

Dans la première de ces catégories, il suffit de dénombrer les emplacements possibles du troisième sommet (C) des triangles ABC. C'est à dire 10x10 = 100
Dans la deuxième, on ne dénombre que les triangles de sommet A, puis on doublera, pour B:
-.ceux qui n'occupent qu'une des 9 subdivisions "en largeur": 9x10,
-.ceux qui s'étalent sur deux subdivisions: 8x10
-.ceux qui s'étalent sur trois subdivisions: 7x10
-. ...
pour aboutir finalement à 2x10x(9+8+7+...+2+1) = 2x10x(9x10)/2 = 900

Au total, il y a 100 + 900 = 1000 triangles.

Dans ce cas, le passage à la généralisation, pour n subdivisions, est immédiat:

$$n^2 + 2n(n-1)n/2 = n^2 + n^3 - n^2 = n^3$$

Mais il serait intéressant d'aller plus loin et de chercher une représentation géométrique de ce dénombrement, comme le suggère une formule aussi simple.

Pour les carrés, il faut aussi distinguer deux catégories:
- ceux dont les côtés sont parallèles à ceux du plus grand de ces carrés,
- les carrés "obliques".

Les premiers s'organisent en carrés de 10x10, 9x9, 8x8, etc. dont il suffit de dénombrer les centres:

1 + 4 + 9 + 16 + ... + 81 + 100 = 385

(Il existe une formule pour la somme des n premiers carrés des nombres naturels: n(n+1)(2n+1)/6.)

Pour les carrés "obliques", le dénombrement est plus délicat et nécessite une organisation rigoureuse, en carrés de 10x10, 9x9, 8x8, etc. qui aboutit au calcul suivant:

1 + 2x(1x2) + (4+9) + 2x(3x4) + (16+25) + 2x(5x6) + (36+49) + 2x(7x8) + (64+81) + 2x(9x10) = 665

Au total, il y a 385 + 665 = 1050 carrés.

Dans le dénombrement des carrés, si l'on suit la suggestion de partir des cas les plus simples, on découvre une relation intéressante entre le nombre (n) de subdivisions et le nombre (C) de carrés.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	1	10	31	72	137	234	367	544	769	1050

Avec un groupe d'élèves, motivés, on doit pouvoir établir ce tableau et, pourquoi pas, chercher à exprimer la fonction qui se cache là-derrière!

Réponse au prochain numéro, avec publication des meilleurs travaux qui nous auront été envoyés.

Il faut tout d'abord s'approprier la situation, comprendre qu'il s'agit d'un maximum d'un genre très particulier: de totaux *"impossibles à atteindre"*, et donc se convaincre qu'on peut obtenir tous les nombres naturels, à partir d'un certain rang, par des sommes composées de 14, 21 et 30.

Une méthode artisanale, qui s'apparente au *crible d'Eratosthène*, consiste à écrire les nombres naturels, par rangs de 7 comme la suite le montrera avec évidence, et à y entourer un par un les totaux possibles:

1	8	15	22	~~29~~	36	43	~~50~~	~~57~~	~~64~~	~~71~~	~~78~~	...
2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	72	79	...
3	10	17	24	~~31~~	38	~~45~~	52	~~59~~	66	~~73~~	~~80~~	...
4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	...
5	12	19	26	33	40	47	54	~~61~~	68	~~75~~	~~82~~	...
6	~~13~~	~~20~~	~~27~~	34	~~41~~	~~48~~	~~55~~	~~62~~	~~69~~	~~76~~	~~83~~	...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	...

- On entoure 14, puis 21, 28 = 2x14, 35 = 14+21, et ainsi de suite. On obtient ainsi tous les multiples de 7 qui sont de la forme:
  $$T = 7k = 14n+21m \quad \text{où} \quad k = 2n+3m \in \{2;3;4;5;6;\ldots\} \quad \text{si } n, m \in \mathbb{N}$$
- 30 permet de sortir de l'ensemble des multiples de 7 et d'entourer tous les nombres de la forme : 30+7k où $k \geq 2$. (La ligne entière à partir de 44.)
- Puis c'est le tour des nombres de la ligne où figure 60, dont le plus grand nombre non entouré est 67, puis des lignes de 90, 120, 150.
- La solution est immédiate, maintenant: le nombre cherché est 180+7 =187.

Mais, bien sûr, on aimerait en savoir plus et trouver une autre méthode, plus économique en calculs et en écritures: la généralisation à d'autres cibles, à d'autres valeurs des zones.

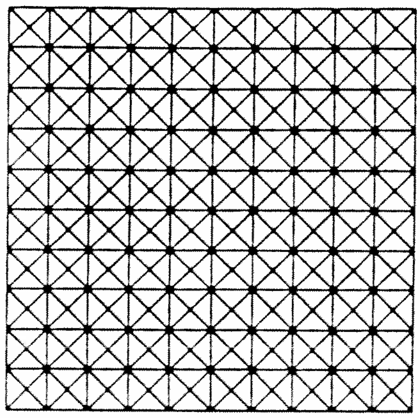
Et d'autres questions apparaissent, spontanément, sur les différentes possibilités d'obtenir des totaux supérieurs à 188, sur d'autres situations qui conduisent au même algorithme de calcul, sur les "théorèmes" classiques à mettre en oeuvre dans ce type de recherche, etc.

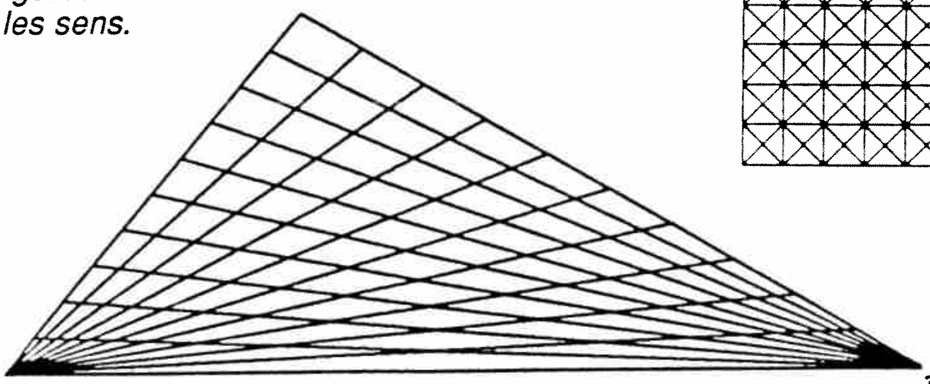
Les pistes, les compte-rendus d'exploitation de ce problème, en classe, seront les bienvenus. *La cible* a encore bien des richesse à nous révéler.

Combien sont-ils?

Combien y a-t-il de carrés différents?
Combien de triangles différents?

Ne comptez que les carrés et les triangles d'aire non nulle. Attention, il y a des figures de toutes dimensions et dans tous les sens.





A B

S O M M A I R E , No 12

Wiler's Law: Government expands to absorb revenue and then some.

If you're early, it's cancelled, if you're on time, it's late, if you're late, you're late.

Campbell's Law: Nature abhors a vacuous experimenter.

Cornuelle's Law: Authority tends to assign jobs to those least able to do them.

Pour vous abonner au bulletin (10 Frs pour une année) adressez-vous à:

Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts Geneveys (038/ 53 38 81)

Pour demander votre adhésion à la Société des enseignants neuchâtelois de sciences prenez contact avec la présidente:

Françoise Jeandroz, Les Allées 30, 2300 La Chaux-de-Fonds (039/ 23 09 56)