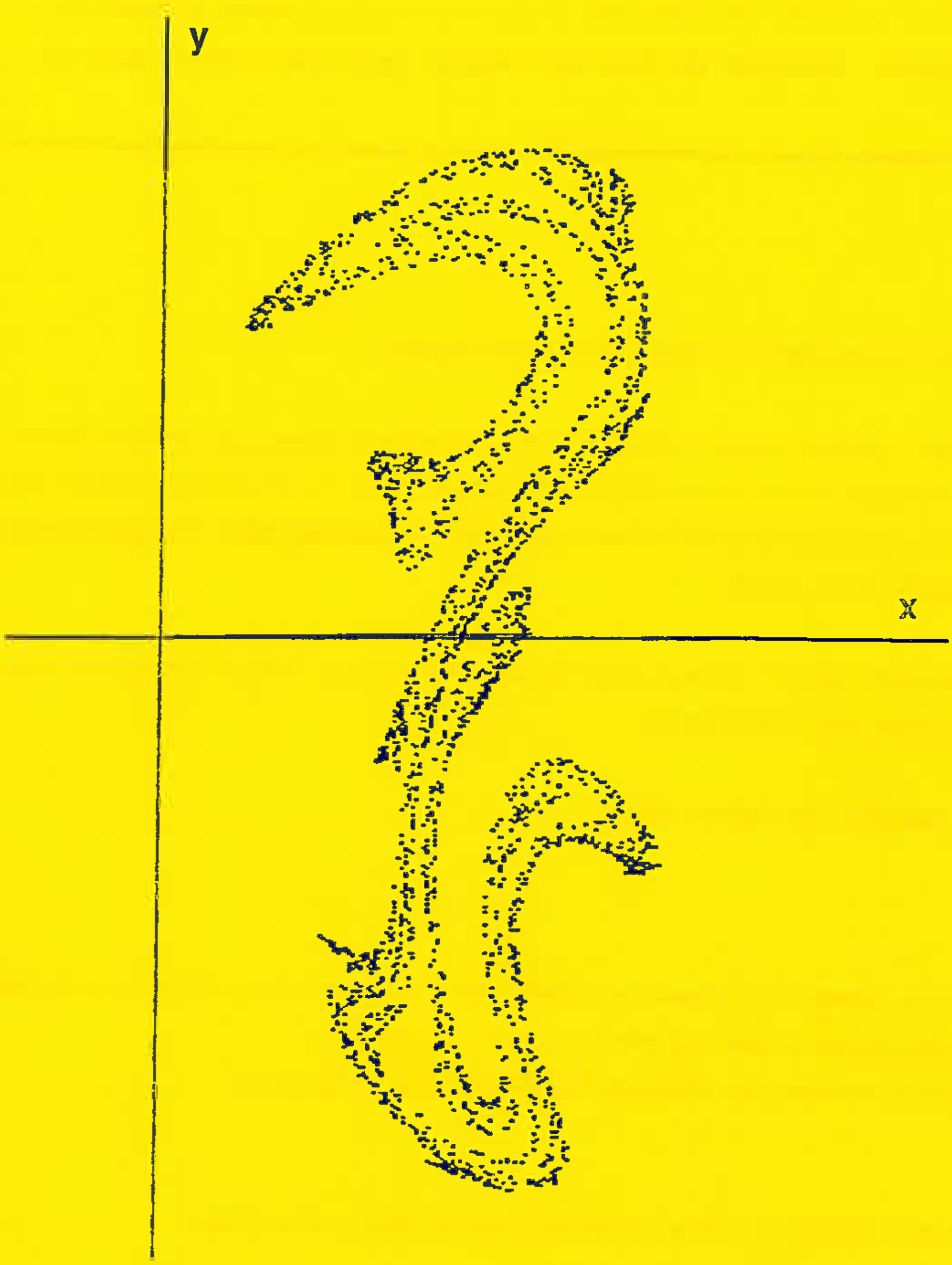
Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences



bulletin n° 15, août 1993

physique

LE CHAOS, un aperçu
(premiere partie)

Jean-Jacques Pilloud
Gymnase cantonal de Neuchâtel

Préambule

Il doit exister à l'heure actuelle un nombre considérable d'approches différentes des systèmes dits chaotiques, parce que ce phénomène de chaos, très à la mode - mais ce n'est pas qu'une mode - touche des domaines aussi divers que la mécanique classique, la démographie ou la physiologie cardiaque. La liste des oublis doit certainement s'allonger chaque jour.

Mon penchant me fait choisir naturellement l'approche qui m'est la moins étrangère: la mécanique. Mais il y en a une autre, au moins aussi fascinante et qui ne nécessite pas de connaissances en physique, c'est celle qui ne demande pour commencer (mais on peut s'en contenter et néanmoins "voir" du chaos) que quelques notions de géométrie analytique et d'algèbre élémentaires, en faisant des itérations d'une application quadratique par exemple.

L'idée de fil conducteur qui va guider cet article est de partir de l'archétype des systèmes oscillants: le pendule simple, puis de naviguer un peu parmi les équations différentielles sans s'éloigner de la berge, et finalement tenter d'établir les connexions entre les systèmes physiques chaotiques et l'aspect très abordable du chaos qu'on peut observer en manipulant des équations itératives du genre $x_{k+1} = f(x_k)$. On s'arrêtera là, tout en sachant que ce dernier aspect ne se gène pas pour déboucher sur des domaines trapus de la théorie des bifurcations et de la topologie, ce qu'on se gardera bien d'aborder.

Au lecteur qui se poserait la pertinente question de savoir s'il vaut alors la peine de poursuivre la lecture, je lui indiquerais que s'il a encore quelques bribes de souvenirs de ses cours de maths et physique de première année d'université, voire même de troisième année de gymnase, cela devrait dissiper ses angoisses.

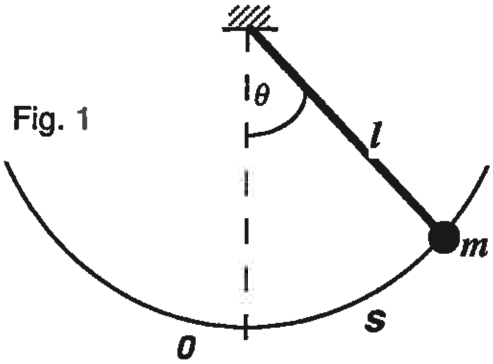
On terminera par une bibliographie d'articles et d'ouvrages brièvement commentée, ainsi que des références informatiques pour les mordus, en citant les applications Mac que j'ai utilisées pour cet article.

Pendules, espace de phase et attracteurs non-étranges

L'une des routes les plus directes pour mener aux systèmes chaotiques a comme point de départ *le pendule simple.*
Soyons très académiques et considérons-en un formé d'une masse ponctuelle accrochée à un fil sans masse et inextensible. On le prendra même rigide pour que le pendule garde sa longueur quelle que soit sa position angulaire. Poursuivons dans l'irréalisme en supposant, dans un premier temps, qu'il n'y a aucun frottement et donc que le pendule oscille indéfiniment dans un plan vertical avec la même amplitude.

Selon un axe curviligne s d'origine O, l'accélération tangentielle est : $d^2s/dt^2 = l\, d^2\theta/dt^2$

Fig. 1



Appliquant la loi fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

et prenant de plus une longueur unité, il vient :

$$d^2\theta/dt^2 + g \sin\theta = 0 \qquad (1)$$

Il s'agit d'une équation différentielle (ED) du deuxième ordre, ***non linéaire*** (à cause du terme en sinus), dont la solution n'est pas simple. On y reviendra. Mais pour l'instant on se contente, comme dans les cours élémentaires, de ne considérer que des oscillations de faible amplitude pour pouvoir confondre l'arc et le sinus, ce qui donne :

$$d^2\theta/dt^2 + g\theta = 0 \qquad (2)$$

Les solutions en sont les fonctions trigonométriques bien connues, complètement déterminées par deux conditions initiales, puisqu'il s'agit d'une ED du deuxième ordre. Mais ce n'est pas vraiment cela qui nous intéresse ici.
En dynamique des systèmes non linéaires, dont la théorie du chaos fait partie, on préfère très souvent transformer une équation différentielle d'ordre n en un système de n équations différentielles du premier ordre. Faisons-le pour l'équation (2) ci-dessus en posant :

$$x = \theta \qquad \text{et} \qquad y = dx/dt \qquad (*)$$

L'équation (2) devient le système :

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -gx \end{aligned} \qquad (3)$$

qu'on va examiner dans le plan (x,y) qui est le ***plan de phase***. Cela nous fera perdre la dépendance temporelle explicite, mais on y gagnera des avantages incomparables pour des systèmes plus complexes.

Notons qu'on appelle ***flot*** un système d'ED du premier ordre.

Si on divise la deuxième équation par la première, on obtient :

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{gx}{y}$$

L'intégration de cette équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre se fait très simplement par séparation des variables. Le lecteur pourra vérifier que la solution est ***une ellipse*** dont le rapport du carré des axes est $a^2/b^2 = g$. Il s'agit évidemment plutôt d'une famille d'ellipses, une pour chaque valeur, positive, de la constante d'intégration.

Notons qu'on aurait pu obtenir cette ellipse par des considérations de conservation d'énergie mécanique ou en prenant les équations de Hamilton plutôt que l'équation de Newton. En mots simples, il suffit d'expliciter chaque terme de $E_{pot} + E_{cin} = E_{mec} =$ const. pour voir que ce n'est rien d'autre que l'équation cartésienne d'une ellipse dans le plan (x,y), c-à-d dans le plan de phase selon le changement de variables (*).

Les coordonnées de l'***espace de phase*** ne sont pas les coordonnées de l'espace habituel - dit alors de *configuration* . On remarque que pour le système (3) les coordonnées x et y sont la position angulaire θ et la vitesse angulaire $d\theta/dt$.
Le nombre de degrés de liberté d'un système dynamique est égal au nombre de variables nécessaires à le décrire dans l'espace de phase: c'est sa dimension. Il y a une petite ambiguïté à propos de ces degrés de liberté: du point de vue de la mécanique habituelle, le pendule traité jusqu'ici, ou une masse oscillant au bout d'un ressort et contrainte à se mouvoir sur une droite, auraient un seul degré de liberté. Or la mécanique des systèmes dynamiques (comme la physique statistique d'ailleurs), leur en attribue deux, par exemple position *et* vitesse pour un mouvement à une dimension. Ce nombre est aussi celui du nombre d'ED du premier ordre, ou encore celui du nombre de conditions initiales nécessaires à déterminer complètement le comportement du système.
La courbe, solution du système d'ED dans l'espace de phase est appelée *trajectoire*, ou *orbite* ou encore *courbe-intégrale*.
L'information temporelle qui subsiste se trouve dans le sens de parcours de l'orbite, l'ellipse pour notre pendule simple.
Poursuivons notre approche piétonne du chaos et venons-en à la notion d'***attracteur***, pas encore étrange, mais cela viendra!
Pour cela, on a besoin d'un peu plus de réalisme. Ajoutons de la dissipation d'énergie à notre pendule, avec des frottement de type par exemple visqueux, c-à-d proportionnels à la vitesse et quantifiés par le coefficient k (par unité de masse); gardons pourtant encore la linéarité.
L'équation (2) devient ainsi :

$$d^2\theta/dt^2 + k\, d\theta/dt + g\,\theta = 0 \qquad (4)$$

Avec le changement de variables déjà utilisé, cette équation se transforme dans le système (flot), toujours linéaire:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -gx - ky \end{aligned} \qquad (5)$$

La résolution n'est plus aussi facile, quoique faisable, mais un peu de jugeote fait vite comprendre que le frottement va faire progressivement diminuer l'amplitude de l'oscillation et qu'à la place d'une ellipse parcourue éternellement, on aura une trajectoire en spirale avec convergence vers l'origine. Ce point particulier, atteint pour t tendant vers l'infini, est un ***attracteur***, le plus simple, et le moins intéressant. En effet, quelles que soient les conditions initiales, le système, à cause de la dissipation non compensée, finira toujours par s'arrêter, physiquement parlant.

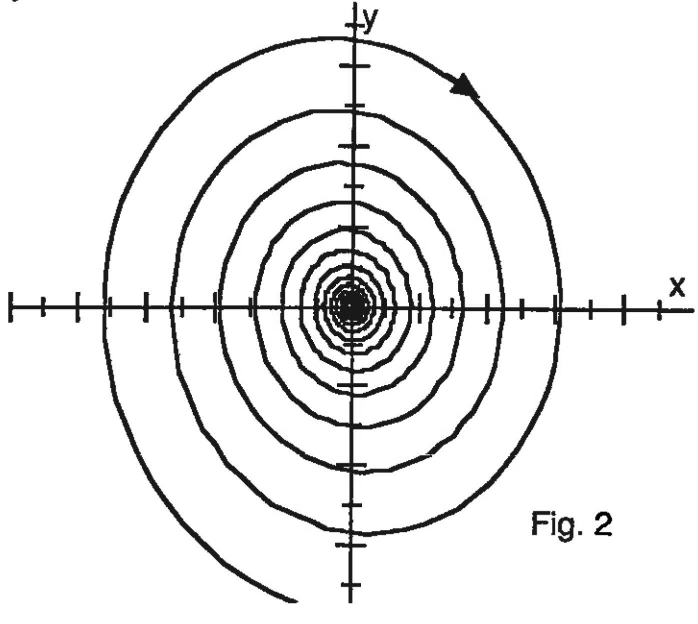


Fig. 2

Un autre attracteur simple est le ***cycle limite***. Considérons pour le voir un pendule entretenu, tel celui qu'on trouve dans les horloges, genre pendule neuchâteloise. L'oscillation garde toujours la même amplitude, pour autant que le mécanisme à ressort ou à contrepoids fournisse l'énergie nécessaire. Si initialement, on lance le pendule avec une faible amplitude, elle augmentera jusqu'à atteindre sa valeur de croisière après quelques périodes. Si au contraire, on lance le pendule avec une grande amplitude, elle s'amortira en quelques périodes pour de nouveau atteindre la même valeur constante.

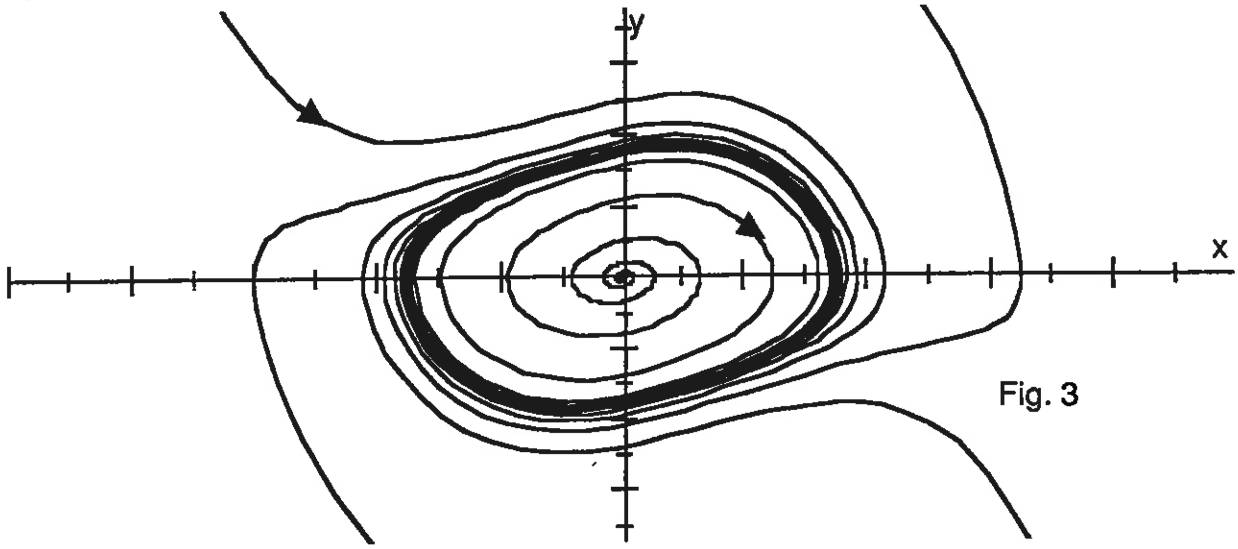


Fig. 3

L'équation différentielle d'un tel système porte le nom de *van der Pol*. Examinons-là brièvement. Dans l'équation (4) ci-dessus, il était bien entendu que le coefficient d'amortissement k est positif, faisant décroître l'amplitude moyenne lorsque t croît. C'est bien ce qu'on doit avoir ici aussi, mais seulement pour des amplitudes assez grandes. Par contre, pour de faibles amplitudes, on voudrait plutôt que k soit négatif! Il suffit alors d'écrire par exemple: $k = x^2 - a$ et le tour est joué si a est positif. En effet, pour x assez petit, a l'emporte et l'amplitude augmente. Le flot dont quelques solutions sont tracées sur la figure ci-dessus s'écrit donc:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -gx - (x^2 - a)y \end{aligned} \qquad (6)$$

Recette pour le chaos

Au lieu de fournir de l'énergie au pendule de façon continue par un mécanisme à ressort ou à contrepoids comme pour l'horloge de grand-père, fournissons-là de façon périodique, par exemple en secouant le point de suspension. Selon l'amplitude et/ou la fréquence de cette sollicitation extérieure, on aura peut-être l'occasion de voir le pendule adopter un comportement plus du tout périodique. Le mouvement sera devenu imprévisible, le pendule oscillera avec une amplitude variable, fera parfois des tours complets dans un sens ou dans un autre, sans qu'il soit possible de déceler de régularité. Autrement dit son mouvement sera devenu ***chaotique***. Pourtant, et c'est là un point crucial, l'équation différentielle qui le caractérise est tout à fait déterministe, en ce sens qu'étant donné l'ED et le nombre suffisant de conditions initiales, le mouvement est parfaitement déterminé. Il est pourtant imprévisible. Qu'est-ce que c'est que cette contradiction?
Tentons de dissiper ce paradoxe en donnant, en trois points, une "recette" raisonnée pour le chaos. Il y a moyen d'établir quelles sont les conditions nécessaires à l'apparition du chaos dans un système dynamique, mais ces conditions ne seront pas suffisantes. Autrement dit, s'il sera assez facile d'affirmer, au seul vu de l'ED d'un système dynamique dissipatif, que son comportement ne sera *jamais* chaotique, il sera par contre bien plus difficile, voire impossible, de dire s'il le sera.

a) Le système doit être dissipatif:
Un attribut frappant et fascinant des comportements chaotiques qui nous intéressent ici est l'***attracteur*** qualifié d'***étrange***. Le terme même d'attracteur suggère que la trajectoire-solution reste confinée dans un domaine fini de l'espace de phase. Comme il faut fournir de l'énergie de façon appropriée au système, celui-ci devra par conséquent la dissiper, sous peine de voir la solution diverger à plus ou moins long terme. Les systèmes conservatifs, ou hamiltoniens, seront par conséquent peut-être chaotiques, mais non caractérisés par un attracteur étrange. Ces derniers ne seront pas examinés ici. On les rencontrerait en astronomie, lors d'études de systèmes à trois corps au moins; mais dans un système mécanique "terrestre" (Aristote dirait "sublunaire"), il y a immanquablement dissipation ("corruption") ce qui implique apport adéquat d'énergie ("génération").

b) Le système doit avoir au moins trois degrés de liberté:
On sait qu'une solution d'une ED est une courbe dans l'espace de phase, comme on l'a vu dans le plan de phase pour les trois pendules examinés jusqu'ici. Une telle trajectoire *ne peut pas avoir de point d'intersection*. En effet, chaque point de l'espace de phase figure l'état du système à un instant donné. Si un point est une intersection, cela signifie que le système évoluera simultanément de deux façons, ce qui est absurde, le déterminisme serait perdu. Autre manière de voir: le flot se présente comme un ensemble d'équations de la forme : $dx_i/dt = F_i(\ldots, x_j, \ldots)$, les F_i ne sont alors rien d'autre que les composantes d'un vecteur-"vitesse" tangent à la courbe dans l'espace de phase, comme le vrai vecteur-vitesse est tangent à la trajectoire du mobile dans l'espace de configuration. Or en un point d'intersection il y aurait deux vitesses différentes, ce qui est absurde. En termes plus mathématiques, on parle d'*unicité* de la solution. On conçoit alors, pour des raisons topologiques assez évidentes, qu'une courbe continue sans fin et sans point d'intersection - la spirale mise à part, mais on a vu à quoi elle correspond - ne peut pas se contenter d'un espace à deux dimensions, elle doit *sortir du plan*. On montre alors qu'un espace de phase à *trois* dimensions est déjà suffisant pour avoir un attracteur étrange, comme on le verra avec des exemples. Ce qui ajoute à la bizarrerie de la solution est que la dimension de cette courbe-solution est *fractionnaire*. Ce n'est pas vraiment une courbe, c'est une fractale! C'est en cela que réside l'étrangeté de l'attracteur.

c) Le système doit comporter une non-linéarité:
La caractéristique d'une ED linéaire est qu'une combinaison linéaire de solutions est encore solution. Cette propriété, on le sait, joue un rôle fondamental dans toute la physique "traditionnelle" (i.e. non chaotique) par l'usage indispensable du principe de superposition. Une autre caractéristique est qu'une telle ED est en principe résoluble analytiquement pour un ordre pas trop élevé et si les coefficients des variables sont des constantes, ou des fonctions très simples. Ce n'est évidemment plus du tout le cas si elle n'est pas linéaire: la somme de deux solutions ne sera pas solution et bien rares sont les ED non-linéaires qu'on puise résoudre autrement que par des méthodes numériques. Mais cela importe finalement assez peu, les machines actuelles donneront toute la précision souhaitée. Quoique!
Dans ce qui nous occupe, la distinction la plus importante entre les ED linéaires et les ED non-linéaires est la *sensibilité aux conditions initiales*; c'est si fondamental que le sigle SCI a été adopté.
Pour le voir, sinon le comprendre, rappelons qu'*une* solution d'une ED d'ordre n est donnée par l'ED elle-même, bien sûr, et n conditions initiales, ces dernières constituant un *point* dans l'espace de phase à n dimensions par lequel passera *la* trajectoire-solution. Une autre solution de la même ED sera obtenue par d'autres conditions initiales, donc un autre point par lequel passera cette autre trajectoire.
Si l'ED est linéaire, et si les conditions sont voisines, les solutions resteront proches l'une de l'autre, pouvant se séparer "gentiment" au cours du temps.

Par contre, s'il s'agit d'une ED non-linéaire, il y a le grand risque que les deux trajectoires divergent très rapidement. On peut montrer que leur séparation croît exponentiellement, et cela est tout à fait crucial. En effet, aussi proches que peuvent être les deux points correspondant à deux conditions initiales voisines, les trajectoires n'auront plus rien en commun après un certain temps, court ou long, mais de toute façon fini.

Pire que cela, on pourra décider que les deux points sont les *mêmes*, c'est-a-dire introduire dans deux ordinateurs les mêmes conditions initiales, les résultats finiront néanmoins par diverger, tout simplement parce que *l'égalité* au sens strict n'est qu'une abstraction mathématique. Or, un ordinateur est un objet physique et il ne peut pas ne pas faire des approximations qui seront très légèrement différentes d'un appareil à un autre. La situation est évidemment semblable sur le plan expérimental pour un *système physique* (un pendule) dont le comportement est régit par une ED non-linéaire: il sera impossible de reproduire *exactement* les mêmes conditions initiales. Selon certaines valeurs des paramètres du système physique, le comportement sera ***chaotique***. Le pendule semblera faire n'importe quoi, il n'aura plus de périodicité, il sera impossible de prévoir son comportement à plus ou moins court terme. Il y a hyper-sensibilité aux conditions initiales. Et pourtant son comportement est totalement déterminé puisqu'il est décrit par une équation différentielle qui ne comporte aucune trace de probabilité ou d'aléatoire!
Mais ne désespérons pas complètement, même si la prédictibilité est irrémédiablement perdue (et dire que c'est de la banale mécanique classique!), il subsiste un certain ***ordre*** dans ce chaos. Car il ne faut pas confondre ce qu'on nomme ici *chaos* avec un désordre qu'on rencontre par exemple dans l'agitation thermique.

Sections de Poincaré et attracteurs étranges

Revenons à un pendule non-linéaire amorti et ajoutons-lui une excitation extérieure périodique. Le plus simple serait de secouer le point de suspension à une fréquence ω_D. Son ED pourrait être :

$$d^2\theta/dt^2 + k\, d\theta/dt + g \sin\theta = f \cos \omega_D t \qquad (7)$$

La présence explicite du temps ajoute une troisième dimension. Pour des raisons qu'on qualifiera simplement de commodes, il est préférable de traiter les ED nommées *autonomes*, c'est-à-dire celles où le temps n'apparaît pas explicitement. Utilisons pour cela un artifice et posons $\omega_D t = z$. On a ainsi une troisième variable de phase et la transformation de l'ED (7) en un système de trois ED du premier ordre se fait en posant:

$$x = \theta\,,\ y = dx/dt \ \text{ et } \ z = \omega_D t$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -ky - g \sin x + f \cos z \qquad (8) \\ dz/dt &= \omega_D \end{aligned}$$

Il y a quatre paramètres ajustables, nombre qu'on peut s'arranger à ramener à trois par un redimensionnement adéquat. On se contente ici de poser $g = 1$, ce qui reviendrait à faire l'expérience sur une planète ayant la bonne gravitation!

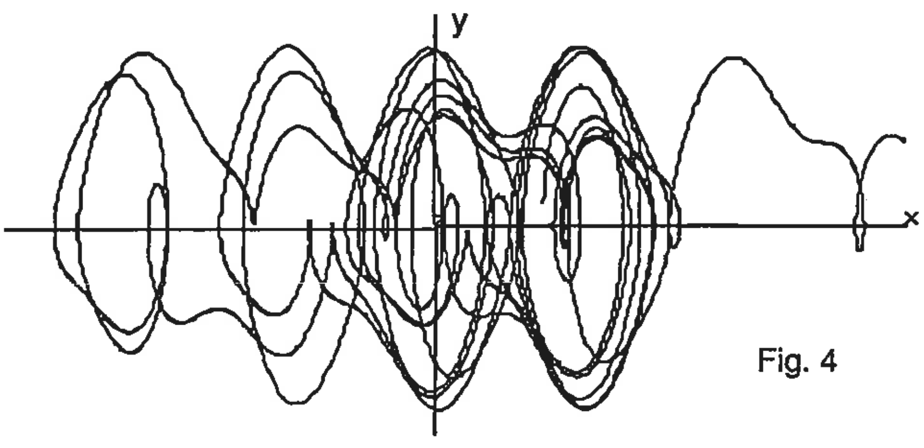


Fig. 4

La figure 4 ci-dessus a été obtenue avec : $k = 0{,}5$, $f = 1{,}2$ et $\omega_D = 2/3$.
Il s'agit de la projection dans le plan de phase (x,y) de la trajectoire de l'espace de phase à trois dimensions. L'axe z (ou t) est perpendiculaire au plan de la figure.
Qu'observe-t-on malgré la médiocre qualité de la reproduction (copie d'écran)? Le mouvement paraît de toute évidence assez irrégulier. On constate ainsi que le pendule ne fait pas qu'*osciller* "n'importe comment", il fait aussi des tours complets dans un sens ou dans l'autre, ce qui se marque par des boucles successives le long de l'axe x, l'angle θ dépassant alors 2π. Mais pour affirmer que le mouvement est vraiment chaotique, il faut faire usage de critères bien définis.
L'un de ces critères est l'analyse de Fourier, par l'examen du spectre des fréquences. On ne le fera pas dans le cadre de cet article. On en utilisera un autre, qu'on tentera de mettre en évidence dans la deuxième partie de cet article.

Le scientifique qui ne parvient pas à dégager une régularité dans l'observation d'un phénomène naturel aura souvent tendance à baisser les bras. Il abandonne s'il ne peut pas appliquer, ou trouver, une loi ou un principe permettant une certaine explication puis une prédiction. Il faut admettre qu'au vu de la courbe ci-dessus - et le pendule n'a pas fonctionné bien longtemps - on a envie de changer de sujet, qualifiant celui-ci de sans intérêt, ce qu'on faisait jusqu'à il y a peu de temps.
Mais Henri Poincaré, vers la fin du siècle passé, n'était de loin pas un scientifique comme les autres. Ses travaux de pionnier en astronomie théorique - problème à n corps, $n \geq 3$ - l'on amené à considérer des systèmes d'ED dont les trajectoires pouvaient être d'un fouilli inextricable. Il eu l'idée géniale de couper une trajectoire par un plan et de n'étudier que l'ensemble des points d'intersection. Banal, me direz-vous, mais encore fallait-il montrer que cette vulgaire coupe gardait les propriétés topologiques de la courbe initiale pour permettre de traiter les problèmes de stabilité que Poincaré se posait. Ce qu'il montra. Ses travaux ne furent pas vraiment oubliés pour ne ressurgir qu'il y a moins de trente ans, mais les préoccupations de la communauté des scientifiques "durs" de la première moitié du vingtième siècle étaient d'un autre ordre: la mécanique quantique et la relativité étaient sur le devant de la scène et ne nécessitaient pas - pas encore! - les mêmes outils mathématiques. Laissons de côté l'épistémologie et reprenons notre démarche.

Restons dans la situation où l'espace de phase est à trois dimensions au plus, puisqu'on sait que c'est déjà suffisant pour voir apparaître du chaos.
Ne considérer que les points d'intersection d'une courbe-solution d'une ED avec un plan simplifie énormément le problème. Non seulement parce qu'il y a une dimension de moins, voire deux, ce qui est déjà inestimable, mais aussi parce que l'ED - ou le système - se transforme en une équation algébrique, les variables continues devenant discrètes.
Prenons un exemple simple: le pendule amorti évoqué plus haut. Simple parce que l'espace de phase est à deux dimensions et que la section de Poincaré peut n'être faite que par une demi-droite passant par l'origine. Il suffira alors d'étudier la succession des points d'intersection de la spirale avec la droite pour voir qu'ils sont *attirés* vers l'origine.

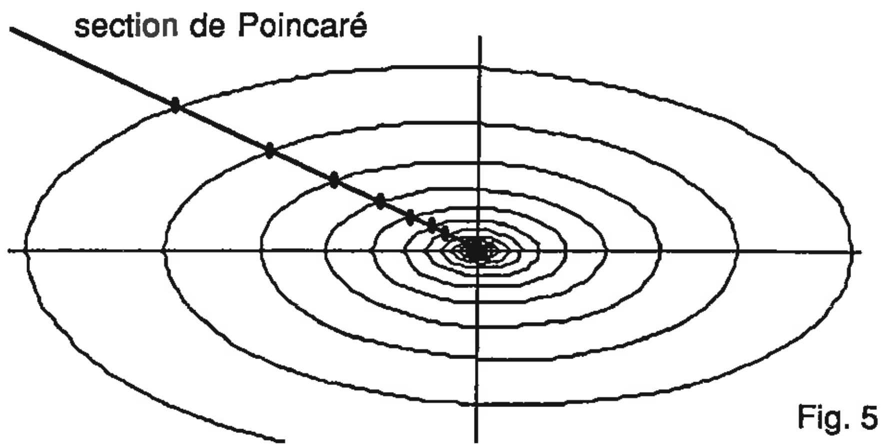


Fig. 5

Autre exemple plus intéressant, un *attracteur étrange*, celui de *Duffing* :

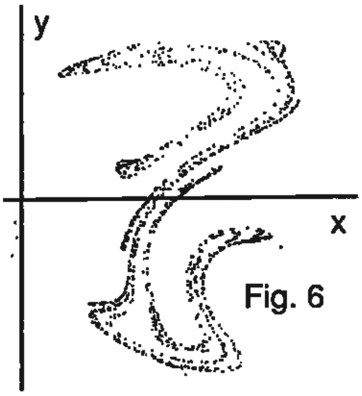


Fig. 6

Ci-contre la section de Poincaré obtenue dans le plan (x,y) du flot:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -0{,}07y - x - x^3 + 27\cos t \end{aligned} \qquad (9)$$

Il est la transcription, selon le changement déjà utilisé, de l'ED d'un pendule entretenu, non-linéaire amorti :

$$d^2\theta/dt^2 + 0{,}07\, d\theta/dt + \theta + \theta^3 = 27\cos t \qquad (10)$$

La non-linéarité par θ^3 représenterait quelque peu le début du développement de sin θ.

(Diagramme obtenu au moyen d'un logiciel faisant partie des applications de *MacMath*. Voir biblio. en fin d'article. Voir aussi une meilleure image sur la page de couverture).

Il est important de préciser que les points ne se succèdent pas dans l'ordre au cours du temps: la figure est globalement toujours la même, mais l'accumulation de points la rend de plus en plus dense.
La figure montre une répartition des points compliquée mais pas aléatoire: il y a manifestement une structure. Un nombre bien plus grand de points - et une meilleure qualité de l'image - montrerait, par des agrandissements successifs d'une portion, une structure d'auto-similarité: la même "allure" se retrouverait à toute échelle, d'où le caractère *fractal* de cet attracteur tout à fait *étrange* et caractéristique d'un comportement chaotique.
Mais là encore, une étude à peine quantitative reste très difficile. Elle devient moins impossible lorsque le système présente une *dissipation* suffisante, comme on va tenter de l'expliquer maintenant et le voir sur des exemples dans la deuxième partie.

Les systèmes *conservatifs* se caractérisent par une conservation de l'énergie bien sûr, mais aussi par une *conservation des volumes dans l'espace de phase*, selon le théorème de Liouville.

En deux mots, considérons les petits domaines δx, δy et δz de l'espace de phase correspondant à des conditions initiales voisines. Ce théorème montre que l'évolution du produit $\delta x \delta y \delta z$ reste invariant; on ne démontre pas, mais ce qui n'est pas incroyable.
A l'inverse, ce volume *diminue* pour les systèmes *dissipatifs*, ce qu'on peut bien admettre aussi. Mais tout réside dans la façon dont s'effectue cette contraction de volume. Pour un système dissipatif non-chaotique, la diminution du volume pourra être due à la diminution des trois (ou des n) facteurs du produit. On devine pourtant un paradoxe avec les systèmes dissipatifs chaotiques qui eux se distinguent par une rapide divergence des trajectoires (SCI), situation qui semble en contradiction avec la contraction. Pourtant, on est obligé d'admettre que la contraction d'un volume ne dit rien sur l'évolution de chacun des facteurs du produit. Tout bêtement, on sait bien que $2 \times 7 < 4 \times 4$. Ainsi, il peut y avoir contraction de volume due à un rétrécissement dans une (des) direction(s) et dilatation dans une (des) autre(s), cette dernière étant alors justement caractéristique du comportement chaotique par la divergence qu'elle provoque. Les spécialistes parlent *d'hyperbolicité*: aussi grand qu'on veut dans une direction et aussi petit qu'on veut dans une autre.

Cette dernière particularité rend alors bien plus commode l'étude de la section de Poincaré: l'ensemble des points, tels ceux de la fig. 6, qui paraîssaient, en cas de faible dissipation, recouvrir progressivement toute une surface, ne sembleront, si la dissipation est forte, plus que "s'aligner selon une courbe", la "surface" s'étant amincie et allongée. Des guillemets parce que cette courbe garde tout de même une certaine épaisseur, d'autant plus faible que la dissipation est marquée. Par conséquent, tout le travail ardu de l'intégration du système d'ED non-linéaires peut se ramener à l'étude d'une application d'un espace à une dimension sur lui-même, par l'itération d'une équation de la forme: $x_{k+1} = f(x_k)$, x étant une coordonnée judicieusement choisie et l'indice k numérotant les points successifs de la section.

Remarque:
Le sentiment de frustration qui peut survenir parce qu'on n'a plus toute la trajectoire et parce qu'il n'est plus possible d'obtenir de véritable équation du mouvement, doit se dissiper car la démarche est désormais différente. Il faut faire son deuil de la connaissance complète, locale, de la solution, car ce qui est en vue, c'est le comportement *global*, la stabilité ou la non-stabilité du système, et son éventuel caractère chaotique.
D'autre part, il ne faut pas perdre de vue que l'attracteur, étrange ou non, correspond à un état *asymptotique* du système dynamique. En effet, pour le simple pendule amorti pour lequel l'attracteur est un point, ou pour l'oscillateur entretenu pour lequel l'attracteur est un cycle limite, il y a prédiction possible: le système restera toujours sur l'attracteur. Par contre, la post-diction est impossible: on ne peut pas dire par quel chemin le système s'est installé sur son attracteur. C'est la dissipation qui provoque cet obstacle, même dans ces deux exemples non-chaotiques. C'est a fortiori aussi vrai pour une situation chaotique à laquelle correspond un attracteur étrange, sauf qu'en plus, même la prédiction n'est plus possible; on saura seulement que le système restera sur son attracteur. Dans l'étude des systèmes chaotiques, on ne s'occupe pas de l'état transitoire, période pendant laquelle le système s'installe sur son attracteur. On examine en fait le système pour t tendant vers l'infini, lorsqu'il est installé sur son attracteur. Le quantitatif y perd au profit du qualitatif.

Dans la ***deuxième partie*** de cet article seront étudiés deux attracteurs étranges: celui de Lorenz et celui de Rössler. On y verra une très forte contraction des volumes dans l'espace de phase, ce qui permettra de dégager un *ordre dans le chaos*. On constatera alors la grande ressemblance entre une certaine vision de ces attracteurs et les itérations de fonctions très simples. ***A suivre...***

Bibliographie

Dans la très abondante et récente littérature existant sur le sujet, je ne sélectionnerai que ce que je suis - ou serais - capable de commenter.

Articles:

Depuis 1980, une trentaine d'articles sont parus dans les deux seules revues *Pour la Science* (PLS) et *La Recherche* (LR). Notre choix ne se portera que sur ces deux périodiques et que sur les articles qu'on estime être les plus fondamentaux.

- "Les nombres de Feigenbaum" (rubrique *jeux mathématiques*), PLS **53**, mars 1982. Un complément à la deuxième partie de ce présent article.
- "Déterminisme et chaos", PLS **62**, décembre 1982. Assez complet, mais pas toujours très facile à comprendre.
- "Déterminisme et prédictibilité", PLS **82**, août 1984. Par l'auteur de l'invention (ou de la découverte) des attracteurs étranges: David Ruelle. Tout à fait lisible.
- "Le chaos", PLS **112**, février 1987. Le même thème, bien sûr, mais traité un peu différemment, avec d'autres exemples; passablement plus accessible que PLS **62**.
- "Explorer le monde étrange du chaos" (rubrique *récréations informatiques*), PLS **119**, septembre 1987. L'aspect numérique, non physique, du chaos (itérations et compagnie).
- "Du chaos chez soi" (rubrique *l'expérience du mois*), PLS **173**, mars 1992. Un petit montage électronique RLC où C = f(U). Je l'ai fait, ça marche! (l'article est un peu sommaire).

- "Les attracteurs étranges", LR **108**, février 1980. Certainement le tout premier article de vulgarisation sur le sujet. Auteur: David Ruelle! Vaut la peine.
- "L'ordre chaotique", LR **185**, février 1987. Toujours pratiquement les mêmes arguments, mais tout est dans la manière, c'est l'art de la pédagogie.
- "La diffusion chaotique", LR **209**, avril 1989. Le chaos pour des sytèmes non dissipatifs, tels des billards ou des flippers sans frottement! L'auteur (M. Hénon) est astronome!
- "Spécial CHAOS" LR **232**, mai 1991. Toute la revue est consacrée à une quantité d'applications, possibles ou véritables, de cette nouvelle et même révolutionnaire vision du monde.

Ouvrages:

- "La théorie du chaos", par James Gleick, Flammarion-Champs 1991. Excellent. Pour débutant! (Avant de le lire, je n'avais pratiquement pas entendu parler de chaos).
- "Dieu joue-t-il aux dés? - Les mathématiques du chaos", par Ian Stewart, Flammarion 1992. Excellente vulgarisation. Malgré le sous-titre, ne nécessite presque pas de préalable en maths.
- "Chaotic Dynamics", par G.L. Baker et J.P. Gollub, Cambridge U.P. 1991, 180 pages. Nettement plus technique mais encore bien abordable. Contient passablement de programmes pour ceux qui savent programmer (BASIC), ce qui n'est pas mon cas.
- "L'ordre dans le chaos", par P. Bergé, Y. Pommeau et Ch. Vidal, Hermann 1984, 352 p. Fut mon livre de chevet pendant plusieurs mois! Certains passages ne sont pas élémentaires mais malgré son âge, l'ouvrage reste une référence. Il a été traduit en anglais, c'est dire!

- "MacMath", par J.H. Hubbard et B. H. West, Springer-Verlag 1991, 162 p. Contient une ***disquette pour MacIntosh***, laquelle recèle une douzaine de petits programmes (tout ça sur 800 k) qui permettent, entre autres, la résolution numérique d'ED de tous types et le tracé graphique des solutions, chaotiques ou non. Ils m'ont permis d'obtenir les figures 2 à 6 du présent article et d'autres qui apparaîtront dans la deuxième partie.
- "An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos" par N.B. Tuffilaro et al. Addison-Wesley 1992, 400 p. env. Insiste beaucoup plus sur l'aspect expérimental, ce qui est assez rare. De plus, l'ouvrage contient aussi une disquette Mac pour se faire du chaos à l'écran.

à suivre ...

Travaux de l'été:
Démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles (on en reparlera)
133 milliards 554 millions de décimales de pi calculées par Yasumasa Kanada

évaluation

Evaluation et épreuves de connaissance

Jacques-André Calame, ESRN
Luc-Olivier Pochon, CPLN

Présentation

Evaluer fait partie de toute entreprise humaine. C'est la rétro-action de l'action menée qui permet à son auteur de juger du résultat en vue d'actions ultérieures. Dans les systèmes organisés, évaluer fait l'objet de négociation entre les partenaires et des critères plus ou moins objectifs permettent de guider des opérations d'évaluation.

Comme tout système organisé l'école a besoin de mettre au point des systèmes de régulations basés sur des prises d'informations de traitement de celle-ci et d'utilisation des résultats. De ce fait, l'évaluation est à l'ordre du jour dans le système éducatif depuis quelques années. Des concepts ont été élaborés: classification des fonctions de l'évaluation, modalités d'évaluation, instruments, etc.

Il nous a paru intéressant de discuter de ce problème en prenant comme prétexte les récentes épreuves de niveau 4. Ces épreuves ont un statut qui paraît peu clair. De multiples discussions concernant cette épreuve existent: contenu de l'épreuve, possibilité d'utilisation des résultats, etc.

Pour cela nous avons analysé question après question une feuille d'épreuve, analyse qui nous conduit à quelques remarques que nous avons regroupé selon les trois points suivants:

Que mesure-t-on? Il s'agit de la matière recouverte et de la qualité de la prise d'information.

Quelles décisions semblent permettre les résultats tels qu'ils sont transmis aux maîtres aux élèves et aux parents?

De quelle évaluation s'agit-il? Etant donné les constatations précédentes comment peut-on situer cette évaluation dans la panoplie des instruments à dispostion: qui est évalué le système ou des personnes? Est-ce une évaluation formative, prédictive ou sommative?

Les faits

Voici in extenso la première épreuve de novembre 1992 avec quelques commentaires en regard de chaque question.

Questions 1 à 4

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad \text{et} \qquad c = -2$

Question 1

Calculez $4ac = ?$

A 2

B 8

C 3

D −8

E autre

A) 4a - c
B) faute de signe
C) 4 + a+ c
on comprend bien les distracteurs

Question 2

Calculez $b^2 - 4ac = ?$

A 1

B 9

C 4

D −7

E autre

Questions 2, 3, 4: problème à tiroir. On espère que les auteurs n'ont pas voulu jouer avec la familiarité de la formule non encore abordée lors de la session

Question 3

Calculez $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = ?$

A 2

B −1

C 1

D 0

E autre

Question 4

Calculez $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = ?$

A $\frac{-3}{2}$

B −2

C −1

D $\frac{-5}{2}$

E autre

Question 5

Dufou joue aux échecs avec Dupion et gagne 3 parties sur 4. Dufou joue aussi avec Delatour et gagne 2 parties sur 3. Sur un total de 21 parties, Dufou en a gagné 15.

Combien Dufou a-t-il joué de parties contre chacun de ses adversaires?

	A	B	C	D	E
Dupion	10	16	12	9	9
Delatour	5	5	9	6	12

par élimination et en sachant que les nombres sont entiers ?

Question 6

Effectuez cette division avec 4 chiffres après la virgule. N'arrondissez pas.

$36500 : 154 \cong Q$

pour les virtuoses...

$Q \cong ?$

A 237,1299

B 237,0012

C 2370,1299

D 237,0129

E autre

Questions 7 à 9

Complétez le dividende ou le diviseur des divisions suivantes de manière à obtenir le même quotient Q qu'à la question 6.

Question 7

$18250 : ? \cong Q$

A 308

B 616

C 38,5

D 77

E autre

que mesure-t-on ?
- les aptitudes au calcul ?
- les propriétés de la division ?

Question 8

$? : 308 \cong Q$

A 73000

B 146000

C 18250

D 9125

E autre

Question 9

$109500 : ? \cong Q$

A $51,\overline{3}$

B 462

C 616

D 308

E autre

Questions 10 et 11

Soit l'égalité suivante: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

Tirez p et r en fonction des autres inconnues.

Question 10

$p = ?$

A $\frac{qr}{r-q}$

B $\frac{qr}{q-r}$

C $r-q$

D $\frac{1}{r-q}$

E autre

Question 11

$r = ?$

A $p+q$

B $\frac{p+q}{pq}$

C $\frac{1}{p+q}$

D $\frac{pq}{p+q}$

E autre

Questions 13 et 14

$x = \frac{a}{a-b}$ et $y = \frac{1}{a-b}$

Questions 13

Calculez $x + y = ?$

A $\frac{a+1}{a+b}$

B $\frac{a-b}{a-1}$

C $\frac{a+1}{a-b}$

D $\frac{a-1}{a-b}$

E autre

Question 14

$z = \frac{x}{x-y}$

Calculez z en fonction de a et b
(réponse en code fractionnaire irréductible)

A $\frac{a-1}{a}$

B $\frac{a}{a-b}$

C $\frac{a-1}{a-b}$

D $\frac{a}{a+1}$

E autre

questions 10,11, 13, 14: l'étude des fractions rationnelles n'a pas été faite au moment de la session

Question 12

Deux seulement de ces six dessins sont identiques. Lesquels?

A 1 et 2

B 1 et 5

C 2 et 3

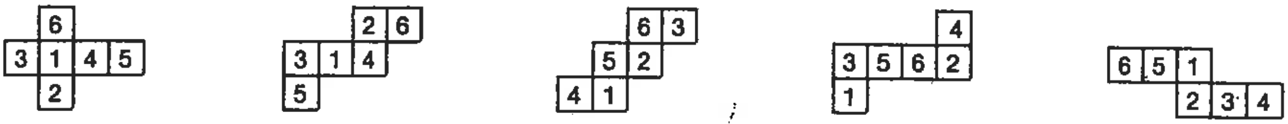
D 4 et 5

E 1 et 3

dans quel thème trouver ce genre d'observation ?

Question 15

Sur un dé à jouer, les nombres figurant sur des faces opposées ont toujours 7 comme somme.
Lequel des développements ci-dessous est celui d'un dé à jouer?



A **B** **C** **D** **E**

Questions 16 et 17

Parmi ces égalités, certaines sont vraies et certaines sont fausses.
Lesquelles sont vraies?

Questions 16

a) $(2^3)^2 = 2^6$ b) $5^0 = 1^5$ c) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{-6}{-6} = 1$

A a) b) c) et d)

B a) b) et c)

C a) et b)

D b) c) et d)

E autre

Question 17

a) $\sqrt{-9} = -3$ b) $\frac{9}{0} = 0$ c) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$

d) $(2+1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2$ e) $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)$

A a) et e)

B a) b) et e)

C a) et c)

D a) c) et d)

E autre

questions 16 et 17:
mesure-t-on l'aptitude au calcul ou l'aptitude à gérer des problèmes de logique inhérents aux réponses proposées ?

Questions 18 à 20

Si $2a - \frac{3(x-b)}{4} = 2(2x+c)$ est équivalent à

$2 - \frac{3x+6}{4} = 4x - \frac{17}{4}$, que valent a, b, c ?

Questions 18 à 20: la réponse "AUTRE" est toujours possible! Il y a une infinité de solutions par exemple:
$a = 0 \quad b = -19/3 \quad c = 0$

Question 18

a = ?

A 2

B $\frac{1}{2}$

C 1

D $\frac{3}{2}$

E autre

Question 19

b = ?

A −2

B 2

C −3

D −6

E autre

Question 20

c = ?

A $\frac{17}{8}$

B $\frac{-17}{4}$

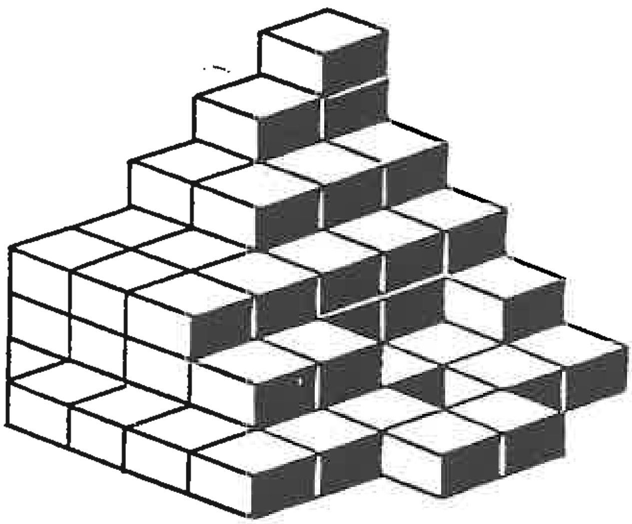
C $\frac{17}{4}$

D $\frac{-17}{8}$

E autre

Questions 21 et 22

Soit le solide partiel suivant:



Question 21

Combien y a-t-il de pièces dans la couche tout en bas?

A 28

B 30

C 31

D 25

E autre

Avez-vous vu les trous ?

Un trou pourrait en cacher un autre!

Question 22

Combien faut-il ajouter au minimum de pièces pour former un parallélipipède rectangle?

Le solide doit être entièrement plein et il n'y a pas de trous qui ne soient pas visibles sur le dessin.

A 141

B 118

C 73

D 144

E 117

Vive la connivence ou quand les distracteurs deviennent des attracteurs!

Question 23

Résolvez l'équation suivante:

$$2 - \frac{3x+6}{4} = 4x - \frac{17}{4}$$

$x = ?$

A $\frac{13}{7}$

B $\frac{31}{19}$

C 1

D $\frac{19}{7}$

E autre

Questions 24 et 25

Soit l'égalité suivante: $(2x + b)^2 = c - 12xy + b^2$

Calculez b et c en fonction de x et y seulement.

Question 24

$b = ?$

A $-3y$

B $3y$

C $-6y$

D $6y$

E autre

Question 25

$c = ?$

A $2x^2$

B $4x^2$

C $4x$

D $-4x^2$

E autre

questions 24 et 25:
même problème qu'aux questions 18 à 20: ici, la réponse b = -3y + 1 conviendrait parfaitement... donc AUTRE est juste!

Récapitulatif

Le tableau donne la répartition thèmes du Plan d'Etudes touchés par cette épreuve. Une astérisque marque les thèmes abordés dans la deuxième épreuve de la même session.

TABLEAU RECAPITULATIF DES LIENS ENTRE QUESTIONS ET THEMES DU PLAN D'ETUDES (7,8,9 PREGYMNASIALES NE)

QUESTION no	NB	CL	F	MES	PE	PS	AT	LR	JS	AG	CAL
1	X	X		(*)							
2	X	X		(*)							
3	X	X		(*)							
4	X	X		(*)							
5	X			(*)							
6	X			(*)							
7	X			(*)							
8	X			(*)							
9	X			(*)							
10		X *		(*)							
11		X *		(*)							
12				(*)				??			
13		X		(*)							
14		X		(*)							
15				(*)	X						
16	X			(*)							
17	X			(*)							
18	X	X		(*)							
19	X	X		(*)							
20	X	X		(*)							
21	X			(*)							
22	X			(*)							
23		X		(*)							
24		X									
25		X									
TOTAUX 1ère épreuve	16	14	0	0	1	0	0	0	0	0	0
TOTAUX 2ème épreuve	0	2	0	23	0	0	0	0	0	0	0
TOTAUX SESSION	16	16	0	23	1	0	0	0	0	0	0

Discussion

Comme on peut le constater, nous n'avons pas pris en compte les objectifs déclarés de l'épreuve préférant essayer de jouer le rôle d'observateurs extérieurs (que nous ne sommes pas vraiment). Mais nous vous laissons la critique de notre démarche et avons atteint notre but si ces quelques notes peuvent aider à la réflexion générale.

Que mesure-t-on?

Tout d'abord on constate que c'est seulement un échantillonnage de la matière qui est testée. Par ailleurs, la forme de l'épreuve privilégie fortement certaines connivences (un élève habitué à chercher plusieurs solutions à un problème est prétérité). Elle favorise aussi certainement les "négociateurs" (travail par élimination, perception de l'attente des correcteurs). Le rythme de travail et l'ordre dans lequel les chapitres sont étudiés en classe a aussi une influence sur les résultats.

Quelles décisions?

Il apparaît difficile de tirer une conclusion sur le niveau de connaissance d'un élève particulier, il n'est pas le maître de ses apprentissages. Par contre, l'épreuve donne une indication du savoir de l'élève par rapport à un morceau de programme arbitraire. Il semble important que les parents soient conscients de ce fait! Au niveau du maître, la moyenne de sa classe constitue un résultat intéressant qui lui permet de situer ses classes, dans un fragment du programme, par rapport à un niveau "moyen". Mais ce résultat est également lié au type de connivences qui le lient à ces élèves. Il serait donc faux de prendre cette mesure comme référence absolue des objectifs à poursuivre et des comportements attendus des élèves. Il est donc important de varier les éléments de programme testés et le type de questionnement.

Quelle évaluation?

Dans la régulation du système, ces épreuves sont à considérer principalement, au niveau du maître, comme une évaluation de type formatif. Elles donnent un état des lieux et permettent d'apporter les ajustements nécessaires. L'aspect normatif qu'elles induisent, pourrait être évité, ou contrôlé, en multipliant au fil des années les formes des épreuves et les domaines couverts. Les résultats globaux pourraient être par le cumul des années, par recoupement et par comparaison, un indice important de l'état de l'enseignement.

Pour conclure

Dans un article récent cité en référence, Clairette Davaud et Jean Cardinet analysent le malaise que suscite les épreuves communes (les cas envisagé est le cas genevois). Ils notent que l'évaluation est un élément du système et qu'une cohérence est à respecter entre toutes ces parties. La malaise serait donc à trouver dans les contradictions entre les pratiques d'évaluation et les pratiques d'enseignement. Le problème des épreuves communes est plus qu'un problème technique (améliorer les énoncés, ...), c'est aussi penser à la pédagogie que l'on veut promouvoir. C'est se demander si l'école a pour but de sélectionner les gens qui savent déjà ou si elle doit développer des stratégies didactiques pour développer des apprentissages significatifs à long terme.

Il est légitime d'avoir la température des connaissances des élèves à différentes périodes de la scolarité. Mais il semble important de penser à leur retombée sur l'ensemble du système. Leur portée est à définir soigneusement en fonction des techniques mises en oeuvre pour le recueil des informations. Il apparaît finalement que deux mots-clés sont: clareté et négociation. Clareté dans les objectifs de l'épreuve et négociation quant à leur élaboration. La routine qui donne une impression de qualité et de facilité et certainement à éviter.

Davaud, C., Cardinet, J. (1992). *Quelles épreuves communes voulons-nous?* Genève: Centre de recherches psychopédagogiques.

Comparaison de problèmes dans divers systèmes éducatifs

Nous avons reçu d'un groupe de l'IREM de Lyon, trois énoncés de géométrie qui concernent des élèves de 15 à 16 ans de l'enseignement français.
Ce groupe dont l'un des objectifs est l'étude des différentes façons d'aborder et de résoudre un exercice de mathématiques dans différents systèmes éducatifs, nous propose trois énoncés (ci-dessous) et pose les questions suivantes à leur propos:

* Ces exercices sont-ils posés dans votre système éducatif? Si oui, à des élèves de quel âge?
* Dans le cas où ils sont abordés, quelles seraient les réponses des élèves que vous jugeriez satisfaisantes et quelle correction modèle proposeriez-vous à vos élèves?
* Voyez-vous des modifications à apporter pour poser ces exercices à vos élèves?
* Pourriez-vous envoyer quelques énoncés d'exercices que vous jugez classiques de votre système éducatif (15-16 ans) et le style de réponses attendues?

Adresse utile IREM de Lyon, Groupe Europe, 43, Bd du 11 novembre 1918 - F-69622 Villeurbanne Cedex.

Enoncé 1

ABCD est un parallélogramme, I est le milieu du segment [CD].
Construire le point F tel que I soit le milieu du segment [BF].

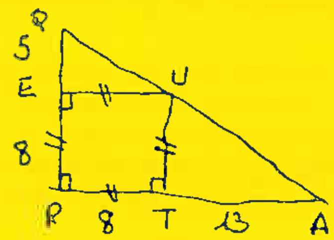
Démontrer que D est le milieu du segment [AF].

Suite en page 4 de couverture

S O M M A I R E , No 15

Vient de la page précédente

Enoncé 2 Le dessin ci-contre est à main levée.
Les points Q, U et A sont-ils alignés ?
Justifier la réponse.



Enoncé 3 Un arbre de 9 mètres dont le pied est en A s'est brisé en B.
La cime est tombée en C à 3,5 mètres de A.
On désigne par x la distance AB (en mètre).
Calculer x.