Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences

bulletin n° 18, sept. 1996

éditorial

Mois de la science, mois de la SENS

Il était une fois sous le thème général du « nombre et de son ombre » 21 exposés ou conférences, 3 expositions, 11 animations (avec des reprises), 16 institutions, sociétés ou associations qui ont mis à disposition leurs locaux ou collaboré et d'autres qui ont apporté leur soutien financier (voir pages 3 et 4 de couverture).

Cette simple énumération à la Prévert suffit a donner un aperçu des sauces avec lesquelles il est possible d'apprêter le nombre. Mais en même temps, elle est le reflet des thèmes scientifiques traités dans notre région, des possibilités institutionnelles, des forces humaines, et des relations qu'il est possible d'établir.

Elle ne rend évidemment pas compte de toutes les informations que chacun a pu glâner au fil des manifestations. L'avenir nous en dira un peu plus sur les retombées effectives de l'entreprise.

Le Bulletin, au fil des prochains numéros, aura l'occasion de parcourir plus à fond l'un ou l'autre des thèmes traités. Ce numéro reprend quelques conférences présentant des aspects plutôt mathématiques: l'article d'Alain Robert, sur les nombres p-adiques et celui de Yadolah Dodge sur les nombres « vivants ».

A propos de Bulletin, chacun aura pu remarquer un espacement dans le rythme des parutions. Diverses raisons sont à l'origine de cet « essoufflement ». En particulier un doute sur son utilité (mais une relecture des anciens numéros lève une partie de ce doute, comme chacun peut s'en convaincre).

Il apparaît que faire perdurer les manifestations du mois de la Science peut donner une bonne raison de vivre au Bulletin. Par ailleurs, à l'heure de la parution de ce numéro, aura lieu une assemblée de la société qui pourrait aussi lui façonner un nouvel avenir.

La rédaction voudrait s'excuser ici auprès des auteurs, en particulier Alain Valette, dont des articles ont tardé à paraître ou sont encore en attente.

Le comité de rédaction

pot pourri

A propos de "A propos de codage", Marcel-Yves Bachmann, note qu'il est possible d'utiliser un théorème plus "faible" que celui d'Euler. En effet, dans la méthode proposée, il est nécessaire de supposer que M soit premier avec n. Pour cela, on découpe le message en tranches inférieures à p et q (et non à n comme signalé par erreur à la page 11).

Or, il est possible que $a^{\varphi(n)+1}$ mod n = a sans que $a^{\varphi(n)}$ mod n = 1. Il suffit pour cela que n soit sans facteur carré, ce qui est le cas ici puisque n = pq.

Le théorème utilisé est donc: si n est sans facteur carré $a^{\varphi(n)+1}$ mod n = a pour tout a. (une façon de le démontrer est d'utiliser le fait que Z/nZ est produit direct des Z/pZ avec p facteur de n).

Exemple: Avec n = 221 = (13*17) et M = 13, on a 13^{192} <> 1 (mod n) et pourtant la méthode fonctionne: 13^{35} mod n = 208 et 208^{11} mod n = 13.

Pour votre formulaire: l'aire et le volume de la sphère de rayon R à n dimensions (tiré de l'article de J.-M. Lévy-Leblond (1994). Archimède et la sphère à n dimensions, Quadrature no 19.)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0	2	$2\pi R$	$4\pi R^2$	$2\pi^2 R^3$	$\frac{8}{3}\pi^2 R^4$	$\pi^3 R^5$	$\frac{16}{15}\pi^3 R^6$
V_n	1	$2R$	πR^2	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 R^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 R^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 R^6$	$\frac{16}{105}\pi^3 R^7$

Lors d'une discussion de fin de comité, un collègue évoque quelques difficultés rencontrées pour la construction d'un triangle dont les médiatrices sont données. Ce problème, ainsi que d'autres, est posé de façon anodine dans Mathématique 9e année. Mais lorsqu'on s'y met à froid, il n'est pas facile de situer la solution obtenue: est-ce la plus simple? la plus élégante? L'équipe de rédaction propose donc que les collègues qui ont des solutions à ces problèmes (la leur ou mieux, celle de leurs élèves) les proposent au bulletin.

Rappel de l'énoncé: Trois droites sont concourantes. Comment construire un triangle dont ces trois droites sont ... les médianes, les médiatrices, les hauteurs, les bissectrices.

mathématique

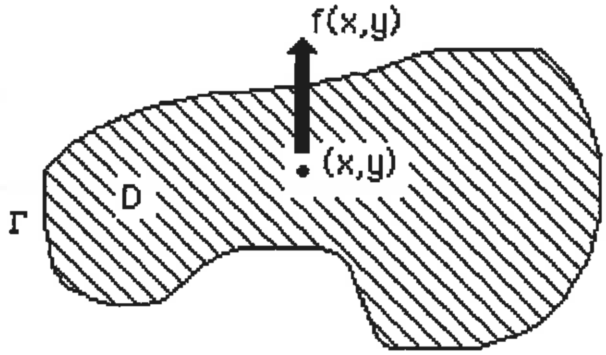
On ne peut pas entendre la forme d'un tambour

Alain VALETTE, Institut de Mathématiques

Un tambour est constitué par une membrane vibrante fixée le long de son bord. En battant du tambour, on observe certaines fréquences, toujours les mêmes. Une modélisation du phénomène consiste à identifier le bord du tambour à une courbe simple fermée G du plan, et la membrane au repos avec le domaine D intérieur à G. Si le tambour résonne selon une fréquence ω, l'amplitude des vibrations de la membrane dans la direction transverse est donnée par une fonction f(x,y) (dépendant du point (x,y) de D), qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\omega^2 f = 0$$

et la condition f = 0 sur G, correspondant au fait que la membrane est fixée au bord. Ici c est une constante dépendant des propriétés physiques de la membrane, et de la tension avec laquelle on l'a tendue sur G.



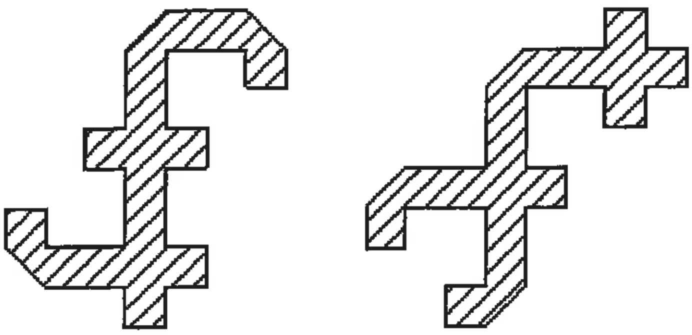
Le problème mathématique sous-jacent s'appelle le *problème de Dirichlet* pour l'opérateur laplacien Δ = \F(∂^2, ∂x^2) + \F(∂^2, ∂y^2) . En posant
λ = \F(ω^2,c^2) ,le problème est de trouver les nombres positifs l pour lesquels il existe une fonction f non nulle sur D telle que

$$(2) \qquad \Delta f + \lambda f = 0 \qquad \text{et} \qquad f=0 \text{ sur G.}$$

Un tel nombre λ s'appelle une *valeur propre* de Δ; les fonctions non nulles qui sont solutions de (2) s'appellent *fonctions propres*, ou *modes normaux* ; elles correspondent aux amplitudes des ondes stationnaires émises par le tambour.

L'ensemble des valeurs propres est le *spectre* de Δ. En 1894, le Français Henri Poincaré a montré que le spectre est une suite qui tend vers l'infini: $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ On a longuement étudié comment la géométrie du tambour influe sur les propriétés de la suite des (λ_n). En 1966, l'Américain Mark Kac pose le *problème inverse* : supposons que l'on connaisse la suite des (λ_n); cela nous permet-il de reconstruire la courbe G? De manière plus imagée: si nous pouvions écouter le tambour avec une oreille parfaite, et ainsi entendre toutes ses fréquences, pourrions-nous retrouver la forme du tambour? "Can one hear the shape of a drum?" [1]

La question de Kac se basait sur le fait que, dès 1912, l'Allemand Hermann Weyl avait montré que la connaissance du spectre de Δ permettait de retrouver l'aire de D et le périmètre de G; on savait aussi que deux tambours en forme de parallélogramme ont même spectre uniquement si les parallélogrammes sont isométriques. Ce n'est qu'en juin 1991 que les Américains Carolyn Gordon, David Webb et Scott Wolpert ont montré que, comme Kac le pressentait lui-même, la réponse à la question ci-dessus est négative: les deux tambours ci-dessous ont même spectre, mais n'ont clairement pas même forme [2].



Ces deux tambours peuvent paraître tarabiscotés; ils sont cependant assez simples, puisque ce sont des contours polygonaux dont les arêtes sont de longueur 1, 2 ou $\sqrt{2}$, et dont les angles intérieurs valent 90°, 135° ou 270°. La preuve du fait qu'ils ont même spectre est un fascinant mélange d'analyse, de géométrie, et de théorie des groupes: l'interaction entre différents sujets se révèle souvent fructueuse en mathématiques.

Adresse de l'auteur: Institut de Mathématiques
Université de Neuchâtel
Rue Emile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel

[1] Ce "problème inverse" est très semblable à la démarche de la spectroscopie (noter à ce propos la similitude de terminologie): en spectroscopie, on cherche à identifier un corps en étudiant la lumière qu'il émet.

[2] On pourra vérifier que ces deux tambours ont même aire et même périmètre.

Qu'est-ce que les nombres p-adiques ?

Alain Robert, Institut de mathématiques

Différentes sortes de nombres

Les nombres entiers naturels 1,2,3,... sont les premiers qui se présentent à l'esprit. On découvre rapidement l'importance du nombre 0 qu'il s'agit d'ajouter aux précédents pour obtenir le fameux ensemble N sur lequel se basent les mathématiques de Kronecker (1823-1891, banquier et mathématicien!). Peano en donne une axiomatique en 1889.

On reconnaît aussi rapidement la nécessité d'introduire des nombres négatifs (chiffres rouges!) et de considérer les couples "actif-passif" pour les décrire. Cette exigence de pouvoir toujours soustraire des entiers peut être reportée sur la division et c'est dans ce but que l'ensemble des nombres rationnels (les fractions) est introduit. Les notations canoniques pour ces ensembles sont les suivantes

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \quad \mathbf{Q} = \{m/n \ : m \ \text{et}\ n \ \in \mathbf{Z} \ \text{et}\ n \ \geq 1\}.$$

Le théorème fondamental de l'arithmétique dit alors que tout nombre rationnel peut être écrit d'une et d'une seule façon comme produit de nombres premiers, certains apparaissant au dénominateur, donc avec des exposants négatifs

$$m/n = \pm\, 2^a 3^b 5^c \ldots \quad (a, b, c, \ldots \in \mathbf{Z}).$$

En particulier, si la fraction *m/n* n'est pas réduite, un nombre premier p peut apparaître au numérateur et au dénominateur et l'exposant qui figure dans la décomposition précédente est la différence des exposants de ce nombre premier apparaissant au numérateur et au dénominateur. Le carré du nombre rationnel *m/n* est ainsi

$$(m/n)^2 = +2^{2a} 3^{2b} 5^{2c} \ldots$$

Il en résulte que les carrés des nombres rationnels sont exactement les nombres rationnels positifs ayant des exposants tous pairs dans leur décomposition comme produit de facteurs premiers. Par conséquent, les nombres suivants

$$2,\ 3,\ 2/3,\ 15 = 3\cdot 5,\ 2/9,\ 27 = 3^3,\ 27/4 = 2^{-2}\cdot 3^3,\ \ldots$$

ne sont pas des carrés de nombres rationnels. Pour pouvoir dire que la diagonale du carré unité est un nombre, il faut encore étendre la notion de nombre pour y inclure $\sqrt{2}$. C'est ainsi qu'on considère l'ensemble des nombres réels **R** que l'on se représente par les points d'une droite (sur laquelle on a choisi une origine, le 0 et une unité, le 1). Ces nombres représentent traditionnellement le continu. Ils permettent une bonne description du temps, dans son passé et son futur, dans son écoulement sans saccade...

Il faut ensuite mentionner les nombres complexes **C** qui représentent une extension très utile des nombres réels. Sans entrer dans les détails de la polémique créée par leur introduction, rappelons que le symbole $i = \sqrt{-1}$ a été introduit par Euler en 1777, précisément comme abréviation d'une unité imaginaire.

Par la suite, Hamilton a encore introduit un corps de quaternions **H** (non commutatif), Cayley a défini des octaves (qui forment un domaine non associatif). Ainsi le concept de nombre a-t-il connu toute une suite d'extensions.

Kurt Hensel (1861-1941) découvre une alternative. Partant des nombres rationnels, il envisage en effet vers 1897 des nombres nouveaux, indépendants des nombres réels. Le corps **Q** des nombres rationnels est ainsi à l'origine de plusieurs extensions *indépendantes*

$$\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_5, \ldots \quad (\text{et } \mathbf{R}).$$

Chacune d'elle peut être ensuite plongée dans un corps universel

$$\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_5, \ldots \quad (\text{et } \mathbf{C}).$$

Ces corps universels sont miraculeusement isomorphes algébriquement bien que leur construction et leur aspect topologique soient totalement différents (les corps $\mathbf{C}p$ sont totalement discontinus, tandis que le corps complexe **C** est connexe). Pour introduire ces nombres p-adiques, nous allons nous inspirer de l'article de R. Cuculière (référence en fin de ce texte) et commencer par les nombres automorphes.

Les nombres automorphes de Gergonne et Lucas

Nous nous intéressons aux nombres n qui dans le système décimal ont la propriété d'écriture

n^2 se termine par n.

Par exemple, on peut citer

6 x 6 = 36 se termine par 6,
76 x 76 = 5776 se termine par 76,
376 x 376 = 171376 se termine par 376, etc.

ou bien

5 x 5 = 25 se termine par 5,
25 x 25 = 625 se termine par 25,
625 x 625 = 390625 se termine par 625, etc.

On peut montrer (bon exercice !) que les deux séries de nombres précédentes peuvent être continuées indéfiniment de façon unique. D'où l'idée de considérer les développements illimités à gauche

$$\ldots 109376 = s, \quad \ldots 890625 = t$$

comme des "nombres" d'un type nouveau. Ces développements seront appelés *nombres décadiques ou* mieux *nombres 10-adiques.* La terminaison vient de la racine *-adis* latine ou *-ados* grecque (la décade est une période de dix jours, utilisée par exemple dans le calendrier républicain après la révolution française; on réserve plutôt le terme de décennie pour une période de dix ans). Les règles usuelles de *retenues* permettent d'additionner et multiplier ces nombres décadiques. On obtient ainsi un anneau commutatif que l'on représente par $\mathbf{Z}_{10}$. Les entiers naturels sont considérés comme des nombres décadiques simplement en convenant que leur développement commence par une infinité de zéros. Par exemple voici une somme

$$\ldots 999990 + \ldots 000010 = \ldots 000000 \; (= 0).$$

Ceci nous permet de dire que le nombre décadique ...999990 est inverse pour l'addition de 10, et donc que ...999990 = -10. Donc notre anneau $\mathbf{Z}_{10}$ contient des nombres négatifs (cette particularité de représentation de nombres négatifs par des nombres commençant par une suite de chiffres 9 est utilisée dans les ordinateurs). Si on continue notre expérimentation des nombres automorphes, on trouve que par construction

$$s^2 = \ldots 109376 \times \ldots 109376 = \ldots 109376 = s,$$

$$t^2 = \ldots 890625 \times \ldots 890625 = \ldots 890625 = t.$$

(Mieux : $s = s^2 = s^3 = \ldots$ et de même pour t !) On trouve aussi

$$s + t = 1 \text{ (mais oui !) et } st = 0.$$

Cet anneau est un peu étrange à première vue. Puisque le produit de deux éléments non nul peut y être nul, on dit qu'il n'est *pas intègre.*

Tout ce qui vient d'être fait dépend naturellement du choix de la base 10 pour représenter les nombres. On pourrait faire de même avec les bases 2, 3, 5, ... Par exemple, $\mathbf{Z}_5$ dénote l'anneau des nombres ayant une écriture illimitée à gauche en base 5. Le sens de l'écriture étant inversé, on doit considérer que les chiffres placés de plus en plus à gauche ont de moins en moins d'importance (et dénotent par conséquent des contributions de plus en plus *petites* dans un sens à préciser...) Pour chaque nombre premier p, l'anneau des nombres p-adiques est ainsi l'anneau $\mathbf{Z}_p$ consistant en les développements illimités

$$\ldots a_3a_2a_1a_0 = a_0 + a_1p + a_1p^2 + a_1p^3 + \ldots$$

Une façon de présenter cet anneau consiste à poser par définition

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}[[X]]/(X - p)$$

donc à identifier les nombres p-adiques aux séries formelles en une indéterminée X que l'on remplace par le nombre p en fin de compte.

Revenons aux nombres 10-adiques. On observe que $s = \ldots 109376$ a un reste de division par 5 égal à 1, ce qui est traditionnellement dénoté par: $s \equiv 1 \bmod 5$.

Le reste de la division de s par 25 est aussi 1 et plus généralement: $s = \ldots 109376 \equiv 1 \bmod 5^n$.

Cela signifie que si on essaie de développer ce nombre en base 5, on trouve:

$$s = 1 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}5^2 + 0{\cdot}5^3 + \ldots$$

Ce même nombre s est divisible par 2, 4, ... et satisfait

$$s \equiv 0 \bmod 2^n$$

qui disent que son développement illimité en base 2 est trivial

$$s = 0 + 0{\cdot}2 + 0{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^3 + \ldots$$

Loin de nous décourager, ces faits nous conduisent à remarquer que l'application qui à un nombre décadique x associe ses développements en base 5 et en base 2, disons

$$f : \mathbf{Z}_{10} \to \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_2$$

est telle que $f(s) = (1,0)$ et $f(t) = (0,1)$. On peut aussi expliciter cette application f sous la forme suivante

$$x \mapsto (sx, tx)$$

Elle est inversible par $(a, b) \mapsto a + b$ car en effet

$$x = 1{\cdot}x = (s + t)x = sx + tx.$$

Cette application f fournit un *isomorphisme* entre $\mathbf{Z}_{10}$ et $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_2$. Il est plus facile d'étudier les anneaux p-adiques (p premier) que l'anneau 10- adique. On peut montrer en effet que lorsque p est un nombre premier, l'anneau $\mathbf{Z}_p$ est *intègre*. Ce sont ces nombres p-adiques qui ont été découverts par Hensel (1861-1941) et qu'il introduit par des considérations algébriques dans *Theorie des algebraischen Funktionen einer Variabeln* (1902). Il ajoute par la suite le corps des fractions $\mathbf{Q}_p$ de l'anneau $\mathbf{Z}_p$ dans *Theorie des algebraischen Zahlen* (1908).

On peut se représenter les nombres rationnels p-adiques comme étant ceux qui en base p ont un nombre fini de décimales: ils correspondent ainsi à un nombre fini de termes $a_i p^i$ avec i négatif (on rencontre des séries analogues en développant des fonctions rationnelles en série de Laurent).

Quelques commentaires encore concernant les nombres décadiques. Le nombre s engendre un idéal principal $(s) = I = s\mathbf{Z}_{10} \subset \mathbf{Z}_{10}$ et la multiplication par s dans l'anneau décadique est un projecteur de cet anneau sur cet idéal. Il en est de même pour la multiplication par t qui projette l'anneau $\mathbf{Z}$ sur l'idéal principal (t) = J. Comme $s + t = 1$, on en déduit que l'anneau décadique est isomorphe à la somme directe de ces deux idéaux. L'équation $x^2 - x = 0$ a en fait quatre solutions dans $\mathbf{Z}_{10}$, à savoir 0, 1, s et t. Il et clair que si x en est une solution, $1\text{-}x$ en est aussi une puisque

$$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x = 1 - x.$$

Les deux solutions complémentaires x et 1-x satisfont encore

$$x(1 - x) = x - x^2 = 0$$

qui représente une forme d'orthogonalité. Ainsi les solutions de $x^2 = x$ apparaissent par paires. Par exemple 0 et 1 forment une paire, tout comme s et t.

Visualisation des anneaux p-adiques

Puisqu'on considère que les premiers chiffres apparaissant dans un développement illimité à gauche ont de moins en moins d'importance, on peut essayer de construire une ***valeur absolue*** sur $\mathbf{Z}_p$ pour laquelle $|p| > 1$ et donc pour laquelle

$$\ldots |p^3| = |p|^3 < |p^2| = |p|^2 < |p| < 1.$$

Ceci peut être fait et la valeur absolue correspondante a une propriété intéressante

$$|x| > |y| \Rightarrow |x+y| = |x| \quad \text{(le plus fort l'emporte !)}$$

Nous ne poursuivrons pas ce point de vue important ici. Néanmoins, une idée simple s'impose. Ne faut-il pas voir un développement illimité à gauche $x \in \mathbf{Z}_{10}$ tout simplement comme un développement décimal illimité à droite, de la forme

$$x = 0, \ldots \in [0, 1] \,?$$

Plus généralement, pourquoi ne pas simplement retourner les développements et considérer l'application

$$\mathbf{Z}_p \to [0, 1] : \ldots a_2a_1a_0 \mapsto 0, a_0a_1a_2\ldots = a_0/p + a_1/p^2 + \ldots \,?$$

On a choisi la numération en base p - par cohérence - aussi pour les nombres réels entre 0 et 1. Deux inconvénients surgissent. Le premier est que cette correspondance ne respecte pas les règles de retenues: les retenues sont reportées à gauche dans la source, tout comme dans l'image alors que la symétrie retourne gauche et droite. Le deuxième est la non injectivité de cette symétrie. En effet, les deux nombres 10-adiques distincts ...9990 = -10 et ...0001 = 1 ont même image 0,1 = 0,0999... (Le même phénomène apparaît bien sûr dans tous les $\mathbf{Z}_p$).

Il est plus raisonnable de se représenter l'ensemble des suites de 0 et 1 par les branches d'un arbre qui présente une structure dichotomique régulière. Une suite binaire illimitée peut soit être interprétée comme branche (trajet) illimitée ou comme extrémité de la branche. Le dessin suivant montre cette façon de représenter $\mathbf{Z}_2$. La correspondance avec les nombres réels entre 0 et 1 est bien illustrée par ce modèle: la coïncidence de deux numérations peut être rendue par un choix d'échelle convenable.

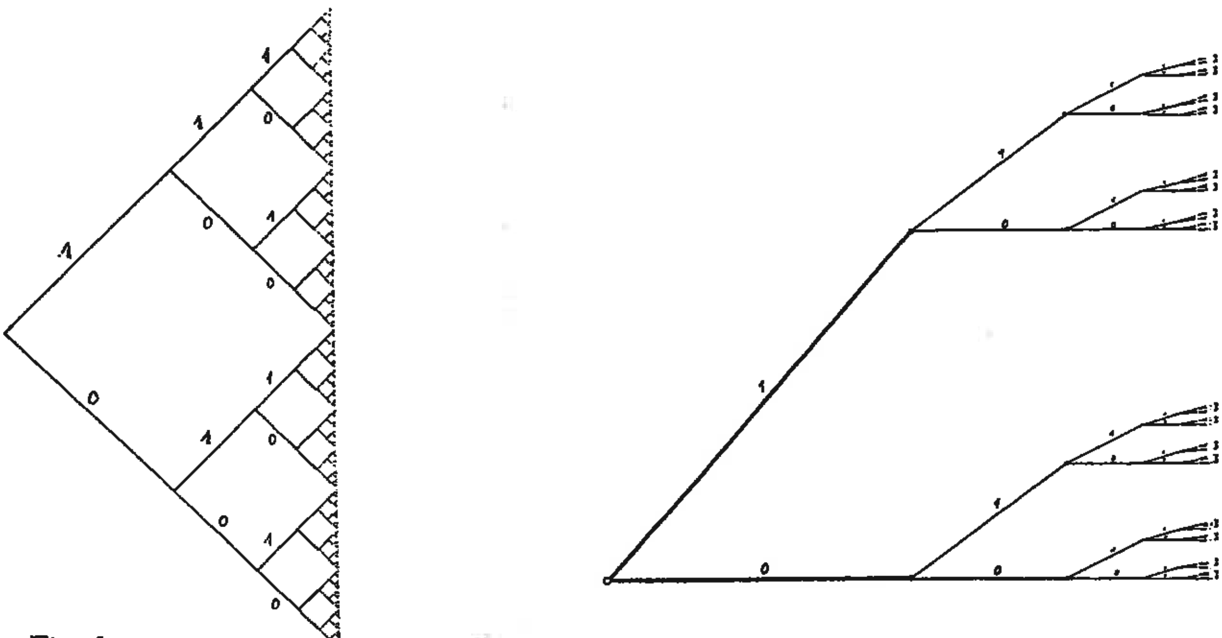


Fig. 1

Le dessin montre aussi comment pallier cet inconvénient: il suffit de séparer les branches par exemple en les faisant aboutir dans l'*ensemble de Cantor*. Rappelons que ce dernier ensemble est obtenu en retranchant le tiers médian de l'intervalle [0,1], puis celui des intervalles restants, etc. Cette procédure s'explique facilement en base 3. Les nombres 0, a_0 ... qui ont un premier chiffre après la virgule différent de 1 en base 3 (donc $a_0 = 0$ ou 2) sont précisément ceux qui évitent le tiers médian. Les nombres qui tombent dans l'ensemble de Cantor sont précisément ceux qui en base 3 s'écrivent avec des chiffres a_i tous différents de l ($a_i = 0$ ou 2). Une bonne correspondance entre $\mathbf{Z}_2$ et une partie de [0,1] est donnée par

$$\varphi : \ldots a_2 a_1 a_0 \mapsto 0,\ b_0 b_1 b_2 \ldots = 2a_0/3 + 2a_1/3^2 + \ldots$$

où donc $a_i = 0$ ou 1 implique $b_i = 2a_i = 0$ ou 2. Cette application nous donne une bonne idée de la *morphologie de* $\mathbf{Z}_2$ (mais ne rend pas compte de la structure algébrique de cet anneau). On peut procéder de même pour $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$, ...

Modèles euclidiens des anneaux p-adiques

Suivons l'idée donnée au paragraphe précédent en la généralisant. Pour cela, introduisons un espace euclidien V (espace vectoriel réel de dimension finie avec un produit scalaire). Choisissons une famille de vecteurs

$$k \mapsto v(k) \in V \; (0 \leq k \leq p - 1)$$

paramétrée par les chiffres qui interviennent dans les développements p-adiques. Alors, on peut fabriquer des applications $\mathbf{Z}_p \to$V

$$\Phi_q \;:\; \sum_{i \geq 0} a_i p^i \;\mapsto\; c \sum_{i \geq 0} v(a_i)/q^{i+1}$$

(où c est une constante de normalisation et $q > 1$ assure la convergence de la série). Selon les valeurs de q, on va voir que Φ_q est injective. Même lorsque ce n'est pas le cas, l'image est un fractal paramétré naturellement par $\mathbf{Z}_p$. Posons

$$\Sigma = \{v(0), v(1), \ldots, v(p - 1)\}$$

$$F_q = Im(\Phi_q) = \Phi_q(\mathbf{Z}_p) \subset \mathrm{V}$$

Par définition même

$$F_q = \cup_{v \in \Sigma}\, c\, (v + F_q/q)$$

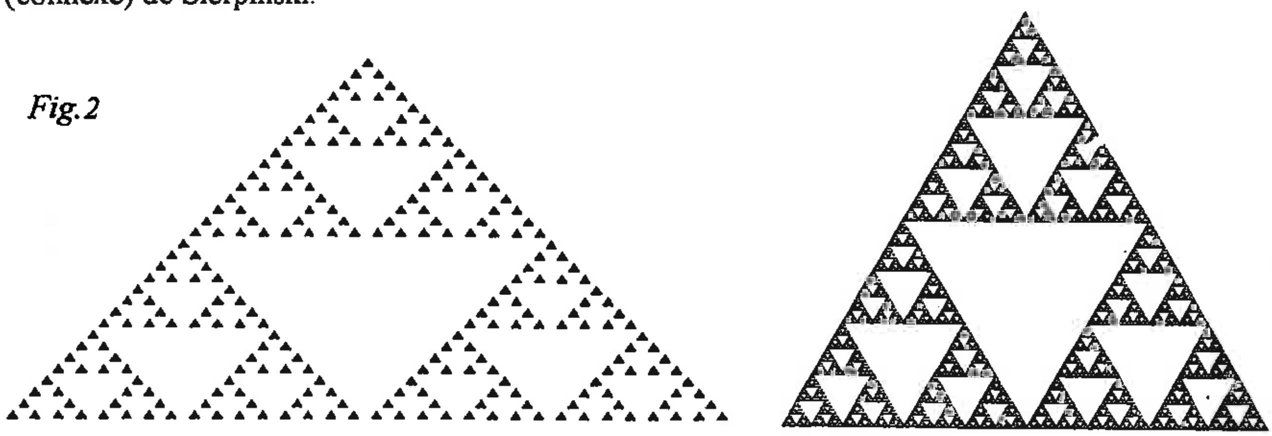
réunion de p morceaux self-similaires au tout. Si q est assez grand, ces morceaux sont disjoints, Φ_q est injective et la dimension de self- similarité de cette image est le nombre d tel que l'homothétie de rapport q produit q^d morceaux semblables à l'original. On doit donc avoir

$$q^d = p, \ \ d = \log p / \log q.$$

Les cas particuliers suivants illustrent les images obtenues avec plusieurs applications Φ_q du type précédent.

Avec $p = 3$, on peut obtenir un modèle de $\mathbf{Z}_3$ qui paramètre naturellement le napperon (connexe) de Sierpinski.

Fig. 2



Avec $p = 5$, on peut construire un modèle plan de $\mathbf{Z}_5$ qui paramètre naturellement un fractal connexe bien connu.

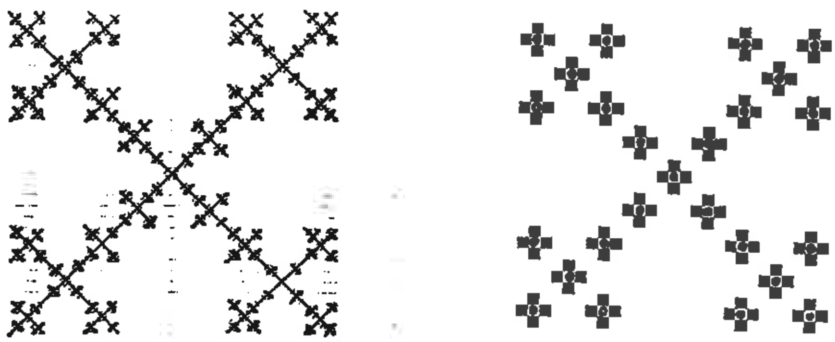


Fig. 3

On peut aussi choisir des vecteurs v(k) dans l'espace de dimension trois et obtenir une famille d'applications de $\mathbf{Z}_5$ dans cet espace dont des modèles situés à l'intérieur d'un tétraèdre. On en observera en particulier les faces (qui donnent des modèles de $\mathbf{Z}_3$) ainsi que les arêtes (qui donnent des modèles de $\mathbf{Z}_2$).

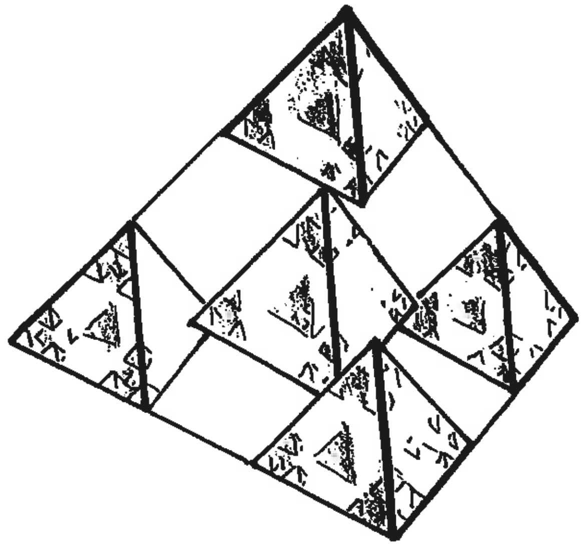


Fig. 4

Finalement, pour $p = 7$, une image donnée dans le livre de Schikhof

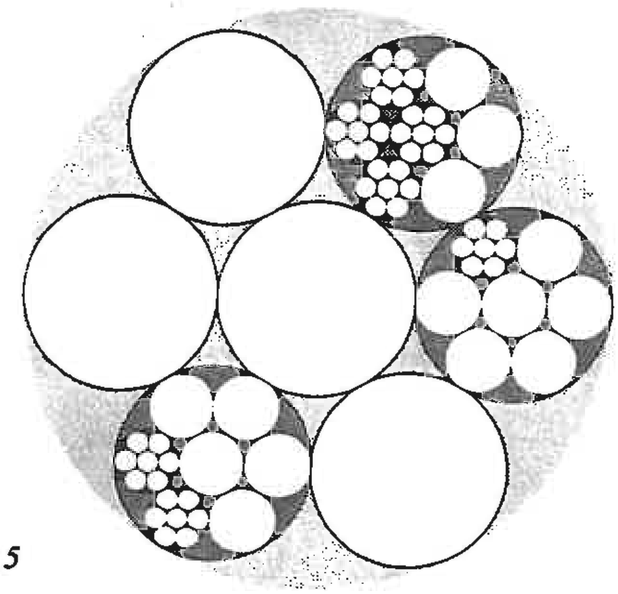


Fig.5

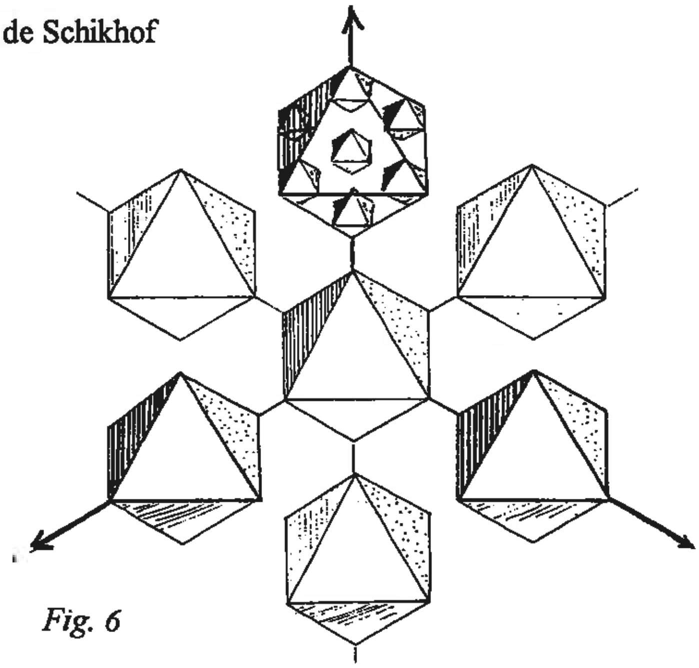


Fig. 6

peut être insérée dans ce contexte. Il est même possible de la relever dans l'espace de dimension trois en fixant les 7 images v(k) ($0 \leq k \leq 6$) en les sommets d'un octaèdre (régulier) et en son centre.

Références

Barsky D., Christol G. *Les Nombres p-adiques,* La Recherche **26** (1995), p. 766-771.

Cuculière R. *A l'horizon de l'arithmétique décimale: les nombres 10-adiques issus des nombres automorphes de Gergonne et Lucas,* Pour la Science (Juin 1986) p. 10-15.

Schikhof W. H. *Ultrametric Calculus: An introduction to p-adic Analysis* Cambridge University Press 1984, ISBN: 0- 521- 24234-7.

Adresse de l'auteur: Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, Rue Emile Argand 11, CH-2007 Neuchâtel

Les nombres vivants

Yadolah Dodge

Groupe de Statistique, Université de Neuchâtel

1. Introduction

Les mathématiciens ont introduit au cours de leur histoire plusieurs ensembles de nombres avec successivement les nombres naturels, les nombres entiers relatifs, les nombres rationnels et les nombres réels. A chaque fois, le nouvel ensemble est défini à partir du précédent, et son introduction permet de définir des concepts mathématiques nouveaux, ainsi que de résoudre des problèmes irrésolubles jusque là. Nous proposons ici un rapide résumé de ces ensembles fondamentaux avant d'introduire à notre tour un nouvel ensemble de nombres, construit à partir des nombres réels, celui des nombres vivants.

1.1. Les nombres naturels

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Les nombres naturels nous sont donnés par Dieu disait Kronecker. Ils sont ce qui différencie les hommes des animaux disait Platon. Ils sont en tout les cas la matière première des mathématiques. A partir des nombres naturels, on peut définir l'addition et la multiplication, opérations qui sont à la base de tout calcul arithmétique et qui existent depuis la nuit des temps. Notons que le mot "calcul" vient du latin "calculi", qui signifie petit caillou, probablement parce que les bergers de Sumer utilisaient de petites pierres pour compter leurs moutons. Notons encore que ce sont les Indiens qui introduisirent le zéro dans cet ensemble.

1.2. Les nombres entiers relatifs

$$\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} = \{\pm n : n \in \mathbf{N}\}$$

Par définition, les entiers relatifs sont des nombres naturels accompagnés d'un signe "+" (généralement omis) ou d'un signe "-". Ils ont permis de définir la soustraction, autre opération élémentaire du calcul arithmétique.

1.3. Les nombres rationnels

$$\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbf{Z}\}$$

Par définition, les nombres rationnels sont des rapports entre deux entiers relatifs. Ils ont permis de définir la division, quatrième opération élémentaire du calcul arithmétique.

1.4. Les nombres réels

On a longtemps cru que tout ce que l'on mesure sur Terre pouvait être exprimé par un nombre rationnel. Or ceci n'est pas le cas, et de loin! On s'est aperçu en effet que $\mathbf{Q}$ n'est pas complet, et on l'a completé en introduisant les nombres réels:

$$\mathbf{R} = \{\lim_{n\to\infty} q_n : (q_n) \subset \mathbf{Q}\}$$

Un nombre réel est par définition la limite d'une suite de Cauchy (q_n) de nombres rationnels (une suite de Cauchy étant une suite de nombres où au bout d'un certain rang la distance entre deux nombres devient arbitrairement petite). Parmi les nombres réels, on distingue les nombres algébriques (rationnels ou irrationnels) et les nombres transcendants.

1.4.1. Les nombres algébriques

Les nombres algébriques sont par définition des nombres qui sont solution d'une équation polynomiale à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Par exemple, le polynôme $x^2 - 2$ s'annule pour les valeurs de $x = \pm\sqrt{2}$. Ces deux nombres $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont donc des nombres algébriques. Les nombres algébriques nous permettent de définir la racine carrée (ainsi que d'autres racines). D'autre part, géometriquement parlant, ils nous permettent par exemple d'exprimer par un nombre la longueur de la diagonale d'un carré.

1.4.2. Les nombres transcendants

Les nombres transcendants sont des nombres réels non algébriques. Les plus connus sont e et π. Par définition, le premier est la limite de la suite (q_n) constituées des nombres rationnels q_n=$(1 + 1/n)^n$ $n = 1, 2, ...$, alors que le second est le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Ces nombres s'expriment de la manière suivante:

$$\begin{aligned} e &= 2.718281828459... \\ \pi &= 3.141592653589... \end{aligned}$$

Remarquons que ces suites de décimales ne sont pas connues entièrement pour la simple raison qu'elles sont infinies et qu'elles ne sont pas périodiques, contrairement à ce que l'on a pour les nombres rationnels.

1.5. Les nombres vivants

Qu'existe–t-il après les nombres réels? Les mathématiciens ont introduit les nombres complexes qui sont des couples de nombres réels et qui ont permis de définir des solutions pour n'importe quelle équation polynomiale; ils ont encore introduit les quaternions qui sont des couples de couples de nombres réels. Dans cet article, nous proposons une autre extension possible des nombres réels: les nombres vivants.

2. Définition des nombres vivants

Dans Freedman, Pisani and Purves (1978, p.88), on trouve la citation suivante: "If the same thing is measured several times, in an ideal world the same result would be obtained each time. In practice, the results are found to differ." Ceci constitue le point de vue essentiel du statisticien. Il fait une distinction claire et nette entre un nombre, qui ne contient pas d'information, et une donnée (du latin "datum" qui veut dire "fait") qui en contient. Il considère les données comme étant contaminées par des erreurs de tout genre (erreurs de mesures, erreurs de transmission, changement des conditions initiales,...). Son schéma de pensée est le suivant:

$$\text{donnée observée} = \text{valeur exacte} + \text{erreur}$$

Nous le réécrivons comme suit:

$$\text{nombre vivant} = \text{nombre réel} + \text{nombre aléatoire}$$

Les nombres vivants que nous définissons ainsi ont donc un rapport direct avec la statistique. Ce ne sont pas de simples nombres réels abstraits mais des nombres concrets qui représentent quelquechose. Ils sont vivants de par leur composante aléatoire.

3. Définition de l'aléatoire

Pour définir les nombres vivants, il nous faut donc préciser ce qu'on entend par nombre aléatoire. Q'est-ce qu'un nombre aléatoire ou une suite de nombres aléatoires? La question n'est pas facile. Dans Gardner (1977, p.163), on lit: "Is there any objective, mathematical way to define a completely disordred series? Apparently there is not."

Knuth (1981) dans son chapitre intitulé "What is randomness" ne donne pas moins de six définitions différentes qui nous aident à cerner ce concept. La plus simple (mais pas totalement satisfaisante) est la suivante: une suite infinie de nombres entre 0 et 9 est dite aléatoire si chaque chiffre 0, 1, ..., 9 apparaît dans la suite avec une fréquence de 1/10, chaque bloc de deux chiffres 00, 01, 02, ..., 98, 99 apparaît dans la suite avec une fréquence de 1/100, et ainsi de suite chaque bloc de n chiffres 00..00, 00..01, ..., 99..98, 99..99 apparaissant dans la suite avec une fréquence de $1/10^n$.

Il est d'autant plus difficile de définir ce qu'est une suite de nombres aléatoires, qu'il est peut-être impossible d'en exhiber ne serait-ce qu'une seule! En comparaison, les suites de nombres non aléatoires sont légion. En voici quelques unes:

- $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$
- $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$

Le problème de générer des suites de nombres aléatoires est d'ailleurs toujours d'actualité en statistique. A une certaine époque, ces suites étaient obtenues manuellement, à l'aide de roulettes ou d'urnes contenant des boules numérotées. Le problème de ces méthodes est qu'elles sont fastidieuses et surtout qu'elles ne sont pas reproductibles (mais n'est ce pas justement la définition de l'aléatoire que de n'être pas reproductible?). On a ainsi développé des générateurs de nombres dits "pseudo-aléatoires" qui sont des algorithmes qui utilisent des fonctions mathématiques, et dont les itérations successives produisent les suites de nombres désirées. Ces méthodes sont évidemment reproductibles: il suffit d'appliquer l'algorithme une nouvelle fois en partant du même point de départ.

Il se trouve hélas, que la plupart de ces générateurs ne sont pas satisfaisants, c'est-à-dire que les suites qu'ils produisent ont des structures (pas toujours perceptibles au premier regard) qui trahissent le manque d'aléatoire. Toute une série de tests statistiques ont été développé pour déceler si un générateur est bon ou non. Et encore, si un générateur passe avec succès tous ces tests, il n'est pas exclu (et même fort probable) qu'un jour, on découvre un test auquel il échoue! Autrement dit, ces tests peuvent prouver qu'un générateur est mauvais, mais ils ne pourront jamais prouver qu'il est vraiment bon! Sombres perspectives en vérité...

Alors, l'aléatoire ne serait-il qu'un idéal non concrétisable? Peut-être pas! La solution à notre problème pourrait bien se trouver du côté des décimales de π.

4. L'histoire de π et de ses décimales

Le nombre π, dit-on, contient l'histoire de l'humanité. Ce nombre a de tout temps été d'un intérêt particulier pour les mathématiciens. Les Babyloniens, les Egyptiens, les Chinois, les Grecs, les Indiens et les Persans ont tous tenté de le calculer avec un maximum de précision. De 2 décimales à l'époque d'Archimède (3ème siècle avant notre ère) à plus de 6 millards ($3 \cdot 2^{31}$) de nos jours, record réalisé par le japonais Kanada en septembre 1995, en passant par les 707 décimales (dont 180 fausses!) calculées à la main pendant 29 ans par William Shanks au 19ème siècle, le nombre de décimales exactes connues a augmenté de siècle en siècle.

Ce qui intrigua les mathématiciens et les géomètres en particulier, c'est l'irrationnalité de ce nombre. On aurait pu croire que ce rapport géométrique mythique, qui fait intervenir avec le cercle "la figure la plus parfaite de l'univers", soit un nombre au moins rationnel. On peut voir en effet dans le désir effrené de calculer ces décimales (on parle de la course aux décimales de π) un désir de découvrir quelquepart dans cette suite infinie, une certaine régularité, un cycle qui reviendrait périodiquement et qui indiquerait que π est le rapport de deux nombres finis. Il y eut çà et là quelques espoirs de voir apparaître une structure. Par exemple, de la 762ème à la 767ème décimale de π, on ne trouve que des 9. Hélas, la 768ème n'est qu'un 8, ce qui ne fit qu'accroitre le mystère de ce nombre. Certains ont même fait des paris. Le docteur Matrix, un fameux numérologue, a prédit en 1970 que la millionième décimale de π serait un 5. Hélas pour lui, il s'est trompé d'une décimale. La 999'999ème décimale est bien un 5, mais la millionième décimale est un 1.

Les grands mathématiciens occidentaux, parmi eux Viète, Newton, Euler, Legendre et Gauss, se sont longuement intérrogés sur la nature aléatoire de ce nombre (étant donné une décimale de π, il n'y a aucun moyen de deviner la suivante). Lambert a prouvé en 1771 que π est irrationnel et Lindemann en 1882 que π est transcendant. Depuis lors, tous les tests statistiques dont nous avons parlé ont été appliqué à la suite de ses décimales mais n'ont jamais pu infirmer son caractère aléatoire. On a bien cru un moment donné qu'il y avait une déficience en 7 mais c'était dû aux erreurs de calcul de William Shanks. C'est donc avec grands regrets que les mathématiciens ont dû abandonner tout espoir de découvrir quelque régularité dans π. "On a soumis jusqu'ici la suite des décimales de π à tous les tests statistiques qui pouvaient en montrer le caractère aléatoire. Ceci est un peu déconcertant pour ceux qui pensent qu'il devrait exister un rapport un peu moins irrégulier entre le diamètre et le périmètre d'une courbe aussi belle que le cercle mais la plupart des mathématiciens pensent qu'on ne trouvera jamais la moindre régularité ni aucun ordre dans le développement décimal de π." (Gardner, 1966, p.87).

Mais ne dit-on pas que le malheur des uns fait le bonheur des autres? Cette absence totale de structure qui chagrine le mathématicien pourrait bien faire le bohneur du statisticien, toujours à la recherche de l'aléatoire. Ainsi les décimales de π pourraient être utilisées pour générer des nombres aléatoires (voir Dodge, 1996) et comme exemple de suite de nombres aléatoires que nous avions tant de peine à trouver, nous pourrions donner:

- $1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, \ldots$

5. Conclusion

En utilisant les décimales de π pour définir l'aléatoire, il nous est possible de donner une définition originale des nombres vivants. Notre nouvel ensemble peut s'exprimer de la manière suivante:

$$\mathbf{V} = \{r + a : r \in \mathbf{R},\ a = \text{une fonction des décimales de } \pi\}$$

Les nombres vivants nous permettent entre autre de résoudre un problème apparemment sans solution: celui constitué par un système d'équations linéairement indépendantes avec plus d'équations que d'inconnues (et ceci à l'aide d'une régression linéaire qui utilise justement le concept de nombre vivant).

Notons enfin que si on avait défini les nombres entiers relatifs à partir des nombres naturels, les nombres rationnels à partir des nombres entiers relatifs, et les nombres réels à partir des nombres rationnels, on a de même défini les nombres vivants à partir des nombres réels (π étant un nombre réel). L'ensemble des nombres vivants est bien ainsi un descendant légitime des ensembles de nombres fondamentaux introduits au paragraphe 1.

References

[1] Dodge, Y. (1996), "The Natural Random Number Generator", *IMS Bulletin*, **25**, 4-5.

[2] Freedman, D., Pisani, R. and Purves, R. (1978), *Statistics*, Norton, New York.

[3] Gardner, M. (1966), *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Simon and Schuster.

[4] Gardner, M. (1977), "Random Numbers" in *Mathematical Carnival*, Vintage Books Edition.

[5] Knuth, D. (1981), *The Art of Computer Programming*, vol.2, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading, MA.

Manifestations organisées dans le cadre du mois de la science

Exposés ou conférences: **Les n'ombres chinoises** (Jean-Paul Reding, Université de Zurich), **Si l'Univers m'était compté** (Jean-Luc Geiser & Philippe Dinant, astronomes amateurs, École Normale), **Les nombres vivants** (Yadolah Dodge, Université de Neuchâtel), **A l'ombre des nombres : peur ou confiance ?** (Pierre Bühler, Université de Neuchâtel), **La mémoire de la matière** (Maria Morris, Université de Neuchâtel), **Leonhard Euler : traits de génie** (Pierre Banderet et André Calame), **L'influenze del duecento in Italia sul progresso scientifico in Europa** (Lucia Grugnetti, Université de Parme), **Méthodes physiques de datation** (Hans Hugo Loosli, Université de Berne), **Qu'est-ce que les nombres p-adiques ?** (Alain Robert, Université de Neuchâtel), **Archéologie et sciences de la nature** (Michel Egloff, Université de Neuchâtel), **De l'aspect noétique du Modulor** (Marc Emery, architecte SIA), **Entre calcul mental et calculatrice : le compte est bon** (Jacques-André Calame et quelques étudiants, École Normale), **L'âge des roches et l'âge de la Terre** (Martin Burkhard, Université de Neuchâtel), **Thèmes de théorie des nombres** (John Steinig, Université de Genève), **Rallyes et concours mathématiques** (Jacques-André Calame, École Normale, François Jaquet, IRDP et Armin Rigo, étudiant UNIL), **Le nombre dans l'évolution des plantes, de la fantaisie à la rigueur** (Philippe Küpfer, Université de Neuchâtel), **Histoire de la numération du VIIIe au XIVe siècles dans le bassin méditerranéen** (Ahmed Djebbar, Université de Paris-Sud, Orsay), **L'Offrande musicale, J.S.Bach** (concert commenté par Claude Favez, Conservatoire de La Chaux-de-Fonds), **Pile ou face par téléphone** (Pierre-Jean Erard, Université de Neuchâtel), **La mesure du temps : atomes en mouvement** (Pierre Thomann, Observatoire de Neuchâtel).

Expositions***: La mémoire de la matière*** (Techno Synthetic SA), ***Le nombre et les plantes*** (Musée d'Histoire naturelle, Office fédéral de la statistique), ***La conquête spatiale, un voyage dans l'espace et le temps*** (exposition itinérante de la commission de sensibilisation aux études de l'académie suisse des sciences techniques, ASST).

Animations: ***Big Bang et Genèse de l'Univers*** (Eric Jeannet, Université de Neuchâtel), ***Réalisation d'un bioréacteur spatial*** (Bart van der Schoot, Université de Neuchâtel), ***Expériences en microgravitation, Équipements électroniques pour satellites*** (D. Ceppi, Compagnie industrielle radioélectrique SA, Gals), ***Si l'Univers m'était compté*** (Jean-Luc Geiser & Philippe Dinant, astronomes amateurs, École Normale), ***La Terre vue de l'espace*** (Frédéric Chiffelle, Université de Neuchâtel), ***Technologie spatiale*** (CSEM, Neuchâtel), ***Histoire de la cosmologie*** (François Goetz, ETS Le Locle), ***Origine des grandes structures de l'Univers*** (Gaston Fischer, Université de Neuchâtel), ***Consultation des oeuvres de Leonhard Euler*** (sous la direction de MM. Pierre Banderet et André Calame), ***L'enjeu des jeux de 7 à 77 ans*** (concours, animation et débats avec Jacques-André Calame et quelques étudiants, École Normale), ***Rallyes et concours mathématiques*** (avec MM. Jacques-André Calame, École Normale et François Jaquet, IRDP).

SOMMAIRE , No 18

Editorial	page 1
On ne peut pas entendre la forme d'un tambour Alain Valette	page 3
Qu'est-ce que les nombre p-adiques? Alain Robert	page 5
Les nombres vivants Yadolah Dodge	page 13

Pour vous abonner au bulletin (10 Frs pour une année) ou pour demander votre adhésion à la Société des enseignants neuchâtelois de sciences adressez-vous à son président:

Michel Favre, rte de la Jonchère 13a, 2208 Les Hauts Geneveys (038/ 53 38 81)

Mois de la Sciences, institutions, sociétés ou associations qui ont mis à disposition leurs locaux, collaboré ou apporté une contribution financière:

l'Académie suisse des sciences techniques (ASST), la Bibliothèque publique et universitaire de Neuchâtel, le Centre professionnel du Littoral neuchâtelois (CPLN), le Club 44 à La Chaux-de-Fonds, l'École normale cantonale, l'Eglise réformée neuchâteloise, paroisse de La Maladière à Neuchâtel, le Gymnase cantonal de Neuchâtel, le Gymnase Numa-Droz, l'Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques (IRDP), le Musée d'histoire naturelle de Neuchâtel, l'Office fédéral de la statistique, le Service de l'enseignement secondaire du Département de l'instruction publique, la Société Dante Alighieri de Neuchâtel, la Société neuchâteloise des Sciences naturelles, Techno Synthetic SA, La Chaux-de-Fonds, l'Université de Neuchâtel, la Ville de Neuchâtel.

Entreprises, sociétés ou fondation qui par leur soutien financier ont permis l'organisation du mois de la Sciences

Électricité neuchâteloise SA (ENSA),
Fondation suisse pour la recherche en microtechnique (FSRM),
La Loterie romande,
Société des ingénieurs et architectes (SIA),
Migros Neuchâtel-Fribourg,
La Neuchâteloise Assurances.